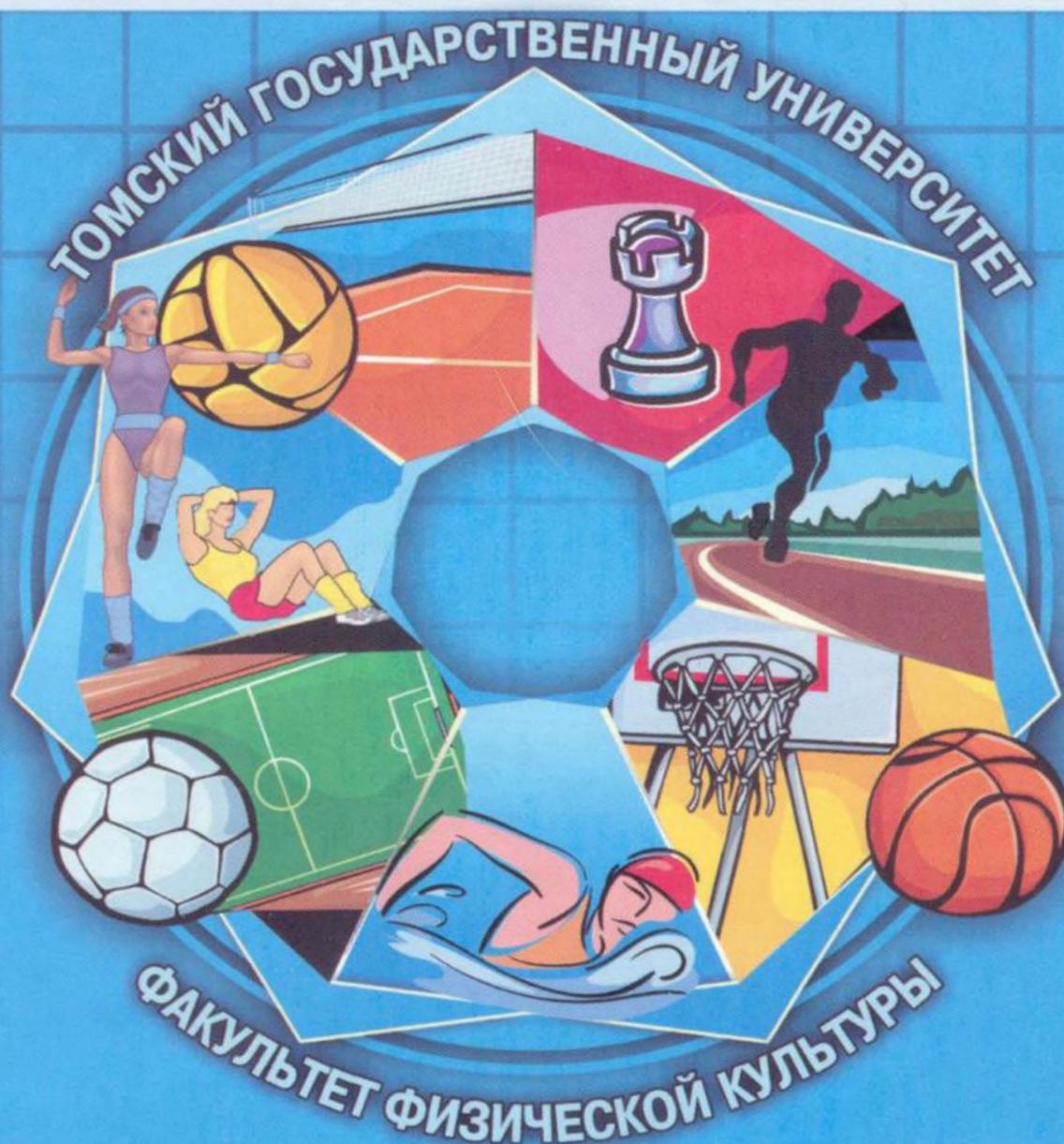


В.И.Загревский,
О.И.Загревский

БИОМЕХАНИКА ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.И. Загrevский, О.И. Загrevский

БИОМЕХАНИКА ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано

*Учебно-методическим объединением по образованию
в области физической культуры и спорта в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 032101 –
Физическая культура и спорт*

**Томск
2007**

УДК 796.012
ББК 75.0 (я73)
З 14

З 14 Загrevский В.И., Загrevский О.И.

Биомеханика физических упражнений: Учебное пособие. – Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. – 274 с.

ISBN 5-91302-004-9 (978-5-91302-004-8)

Учебное пособие содержит расширенные сведения по методам биомеханики: анализу и синтезу. В книге раскрываются предмет, задачи, методы биомеханики и биомеханические методы исследования. Особое внимание уделяется механизмам управления движениями спортсмена в опорном и в безопорном положениях. Освещены вопросы моделирования, представлена классификация моделей синтеза движений биомеханических систем. Даны формульные выражения математической модели синтеза движений человека с программным управлением на кинематическом и динамическом уровнях.

Представлен понятийный аппарат целенаправленных движений человека, освещаются теоретические вопросы построения оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ.

Практикум по биомеханике физических упражнений содержит 7 лабораторных работ расчетно-графического характера.

Содержание книги существенно расширяет сложившиеся рамки представления о биомеханике спорта как учебной и научной дисциплине. Адресуется студентам факультета физического воспитания педагогических институтов, университетов. Книга может быть с интересом воспринята и специалистами в области биомеханики физических упражнений.

УДК 796.012
ББК 75.0 (я73)

Рецензент –
доктор педагогических наук, профессор,
заслуженный работник физической культуры РФ *С.В. Дмитриев*

ISBN 5-91302-004-9
(978-5-91302-004-8)

© Томский государственный университет, 2007
© В.И. Загrevский, О.И. Загrevский, 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги – сосредоточить внимание на основных биомеханических закономерностях работы опорно-двигательного аппарата тела человека и техники соревновательных упражнений, а также показать современный механико-математический аппарат, используемый при анализе и синтезе технических действий спортсмена. При этом авторы стремились помочь студентам, приступающим к изучению биомеханики физических упражнений, начать вырабатывать в себе необходимую для будущего специалиста культуру биомеханического мышления, а также определенную смелость в самостоятельном подходе к решению проблемных задач.

Книга содержит две части: 1) анализ движений спортсмена и 2) синтез движений спортсмена. Первая часть написана О.И. Загrevским (I-IV главы), вторая – В.И. Загrevским (V-VII главы).

В первой части книги излагается материал, позволяющий по материалам инструментальной или оптической регистрации движений, выполнить анализ биомеханики движений спортсмена. В настоящее время, подобный подход к исследованию техники упражнений в спорте является доминирующим.

Во второй части книги излагаются, не рассматриваемые ранее в специальной учебно-методической литературе, методологические основы синтеза техники двигательных действий спортсмена в вычислительном эксперименте на ПЭВМ. Основным объектом исследования в этом случае принимается математическая модель движений человека. Выступая в качестве копии опорно-двигательного аппарата тела человека и подчиняясь объективным законам природы и субъективно формируемому исполнителем упражнения программному управлению, математическая модель синтеза движений человека позволяет получить различные траектории движений спортсмена. Кроме этого в книге дается понятие об оптимальной технике спортивных упражнений и возможности ее построения в вычислительном эксперименте на ПЭВМ.

Большое внимание уделяется математическому аппарату расчета кинематических и динамических характеристик двигательных действий спортсмена. И это вполне обосновано, так как в настоящее время биомеха-

ника, из науки возникшей в недрах биологии и биофизики, перешла в реестр технических наук.

Учебное пособие, рассчитано, в основном, на студентов факультета физической культуры институтов, университетов и академий физической культуры и спорта, но оно может быть полезно аспирантам и преподавателям вузов.

ВВЕДЕНИЕ

Государственный образовательный стандарт специальности 022300 – физическая культура и спорт Российской Федерации (2000) устанавливает назначение, структуру, содержание специальности и *требования к уровню подготовки специалиста*.

В руководящем документе отмечается, что одним из видов профессиональной деятельности специалиста является проектно-аналитическая деятельность, и то, что специалист, с квалификацией педагог по физической культуре, должен **уметь**:

– *владеть навыками рационального применения учебного и лабораторного оборудования, аудиовизуальных средств, компьютерной техники, тренажерных устройств и специальной аппаратуры в процессе различных видов занятий;*

– *уметь применять навыки научно-методической деятельности для решения конкретных задач, возникающих в процессе проведения физкультурно-спортивных занятий;*

– *уметь определять причины ошибок в процессе освоения обучаемыми двигательных действий и развития физических качеств и находить методику их устранения.*

В настоящее время необходимость использования новых информационных технологий в процессе обучения практически никем не оспаривается. Имеется достаточно большое количество работ, посвященных методике использования средств компьютерной техники в различных аспектах современной технологии обучения.

В области естественнонаучных дисциплин специалист должен **иметь представление**:

– *об основных понятиях, физических и механических законах движения точки, тела, системы тел;*

– *о математическом моделировании движений в спорте.*

Распространяя требования образовательного стандарта, предъявляемые к специалисту в области его знаний, умений и представлений, на моторный компонент двигательных действий человека, можно отметить, что двигательные действия человека, в частности, спортсмена, представляют собой сложную биомеханическую структуру. Возможность прогнозирова-

ния рациональной техники соревновательных упражнений для конкретного исполнителя, указаний по технологии построения биомеханически целесообразных и эффективных структур новых двигательных действий крайне ограничена. В то же время специалист должен *знать и уметь использовать*:

- основы кинематики, включающей программу положения тела в пространстве при выполнении упражнений;
- основы динамики, позволяющей установить закономерности, связанные с силовым обеспечением физических упражнений;
- основные правила синтеза двигательных действий в процессе обучения.

В настоящее время обучение технике изучаемых упражнений в спорте строится на основе теоретических сведений об общих биомеханических закономерностях изучаемой структурной группы движений, не учитывающих индивидуальные антропометрические особенности спортсменов. А на практике совершенствование техники соревновательных упражнений осуществляется эмпирическим методом: «проб-ошибок».

Предварительного теоретического построения и обоснования оптимальных вариантов построения движений для конкретных исполнителей не проводится ввиду отсутствия научно-обоснованной методики синтеза и оптимизации двигательных действий спортсмена. И, пожалуй, единственным методом исследований, позволяющим синтезировать технику движений спортсмена не в логической, а в количественной форме, является метод имитационного моделирования движений человека на ПЭВМ. Для реального воплощения метода имитационного моделирования движений человека на ПЭВМ требуется разработка *конструктивных* математических моделей синтеза движений на основе базовой математической модели. Учет возможностей решения поставленной двигательной задачи, на основе выбора требуемого программного управления, обуславливает трансформацию базовой математической модели в семейство конструктивных. Однако реализация на практике этого, весьма перспективного, направления научного поиска сдерживалась до последнего времени рядом факторов, в частности, таких как:

- высочайшая сложность используемого механико-математического аппарата;

- методологическая фрагментарность разработки проблемы построения математических моделей синтеза движений биомеханических систем;
- трудоемкость создания программного продукта для ПЭВМ.

С появлением современных ПЭВМ и последними достижениями в области биомеханики, механики управляемого тела, оптимального управления и программирования возникла возможность практической реализации идеи имитационного моделирования движений человека на ПЭВМ.

Сущность метода имитационного моделирования движений человека на ПЭВМ заключается в том, что пространственно-временная эволюция многозвенной биомеханической системы описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка, к примеру, построенных в форме уравнений Лагранжа второго рода. Затем, по заданным начальным условиям движения биосистемы и управляющим воздействиям, заданным на всей траектории биомеханической системы, любым из численных методов интегрирования вычисляется траектория движения, организация ее пространственной эволюции по времени. Изменяя начальные условия движения и формируя разнообразное программное управление на всей траектории биосистемы, в вычислительном эксперименте на ПЭВМ имитируются различные варианты моделируемого движения. Это позволяет не только строить технику упражнений с требуемыми свойствами, но и рассматривать возможность выполнения новых, ранее не исполнявшихся соревновательных упражнений (что очень важно в таких видах спорта как гимнастика, акробатика, прыжки в воду и др.), а также обосновать наиболее рациональную структуру исследуемых упражнений. При этом ЭВМ с программами, дисплеем помогает тренеру выбрать наиболее рациональные формы движений.

Для использования метода математического моделирования движений биомеханических систем, необходима предварительная разработка основных аспектов математического, программного, информационного, технического и других видов обеспечения вычислительного эксперимента на ПЭВМ, в частности, таких как:

1. Создание корректной математической модели опорно-двигательного аппарата тела человека.
2. Разработка математической модели движений человека.
3. Формализация цели и программы движений.

4. Выбор управляющих воздействий (программное управление) и их аналитическое представление.

5. Разработка методов использования интерполяционных сплайн-функций для определения начальных и конечных условий движения биосистемы и задания программного управления в виде таблицы чисел или в аналитической форме.

6. Разработка методов логической организации и реорганизации массивов базы данных моделирования.

7. Составление алгоритмов функционирования модели.

8. Разработка и составление компьютерной программы.

Можно привести еще целый список вопросов, требующих своего решения при практической реализации метода имитационного моделирования движений человека на ПЭВМ. Однако все трудности, сопряженные с практическим использованием этого метода, окупаются, в дальнейшем, педагогическим выходом результатов исследований, ориентированных на совершенствование методики обучения.

В технологической схеме решения проблемы построения оптимальной техники соревновательных упражнений на ПЭВМ можно выделить три основополагающих компонента:

– построение конструктивных математических моделей синтеза движений человека;

– разработка компьютерных программ синтеза оптимального управления в движениях биомеханических систем и эвристического поиска оптимальной техники спортивных упражнений;

– педагогические исследования различных аспектов программирования обучаемой деятельности спортсменов на основе эвристического поиска оптимальной техники соревновательных упражнений на ПЭВМ.

В данном учебном пособии рассматриваются лишь те аспекты синтеза двигательных действий спортсмена на ПЭВМ, которые не требуют специальных знаний в области математики, механики, теории управляемого тела и информатики. В то же время достаточно полно и подробно освещены вопросы базовой математической модели синтеза движений человека, классификации и построения конструктивных математических моделей и даны первоначальные сведения о математических методах построения оптимальной техники упражнений в спорте.

1. ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ БИОМЕХАНИКИ

Основы учебной дисциплины наиболее полно раскрываются в *предмете* и *методе* соответствующей науки.

Любая наука имеет свой предмет исследования. Предмет науки раскрывает:

- Что именно изучается (*объект познания*).
- Какую сторону действительности наука изучает (*область познания*).
- С какой целью изучается.

1.1. Общая характеристика биомеханики как учебной и научной дисциплины

Метод науки показывает основной способ исследования, путь познания закономерностей исследуемых явлений, получения новых знаний.

Биомеханика – наука о законах механического движения в живых системах.

В биомеханике, как науке, можно выделить следующие прикладные направления исследования:

1. Биомеханика физических упражнений.
2. Инженерная биомеханика.
3. Медицинская биомеханика.

Биомеханика физических упражнений ориентирована на поиск рациональной техники физических и соревновательных упражнений, на совершенствование их кинематической и динамической структуры, на научное обоснование эффективной методики обучения двигательным действиям.

Инженерная биомеханика смыкается с бионикой, инженерной психологией («человек и машина»), связана с разработкой роботов, манипуляторов и других технических устройств, умножающих возможности человека в трудовых двигательных операциях.

Медицинская биомеханика дает обоснование методам протезирования, протезостроения, травматологии, ортопедии, лечебной физической культуры.

Объект познания биомеханики

Объект познания биомеханики – двигательные действия как системы взаимно связанных активных движений и положений тела человека.

Как наука биомеханика изучает не только движения человека, но и движения животных. Однако двигательные действия человека существенно отличаются от движений животных:

- осознанная целенаправленность движений человека;
- возможность контролировать движения и планомерно совершенствовать двигательные действия.

Учебный курс биомеханики направлен на изучение движений только человека, которые совершаются на высшем уровне управления ими. Именно эти особенности движений человека не имеют объяснения ни со стороны классической механики, ни со стороны биологических наук.

Как отмечает основоположник отечественной школы биомеханики Н.А.Бернштейн (1966): «В норме человек производит не просто движения, а всегда действия». *Действия* человека всегда имеют цель, определенный смысл. Из действий человека, как из кирпичиков движений, складывается его *двигательная деятельность*. Двигательные действия, составляющие двигательную деятельность, осуществляются посредством *целенаправленных активных движений*. Именно *активные движения человека (а также сохранение положений тела)* является объектом изучения биомеханики. И здесь следует отметить, что активные движения изучаются как **системы** движений в двигательных действиях человека.

Область изучения биомеханики

Область изучения биомеханики – механические и биологические причины возникновения движений и особенности построения и выполнения движений в различных условиях.

Причины возникновения движений человека и причины их изменения необходимо рассматривать как с позиций *механики*, так и с точки зрения *биологии*, учитывая роль человеческого сознания в *управлении* движениями.

Механическое движение в живых системах, в частности, в движениях человека проявляется:

- в *передвижении* биосистемы относительно внешней среды;
- в *деформации* самой биосистемы – перемещение одних ее частей относительно других.

Движения абсолютно твердых тел, которые не деформируются, описываются основными законами Ньютона. В живых же системах работа *внешних сил* (тяжести, трения, сопротивления внешней среды и др.), а также *внутренних сил* (тяги мышц) расходуется и на деформацию опорно-двигательного аппарата.

Действие внутренних сил обусловлено *управлением* со стороны центральной нервной системы. Поэтому, для корректного описания закономерностей движений человека, недостаточно ограничиться изучением непосредственно механики движения, но и необходимо рассматривать биологическую сущность организации действия внутренних сил в исследуемом двигательном действии. Именно управление движениями с помощью внутренних сил обеспечивает высокую эффективность двигательных действий в различных условиях исполнения.

Закономерности функционирования мышечного аппарата тела человека определяются рядом особенностей (зависимость «сила – скорость», зависимость «сила – суставной угол», инерционность процесса мышечного напряжения, позно-тонические рефлекс и т.п.), которые необходимо учитывать при построении движений. Все это не является предметом исследований в классической механике и поэтому содержание биомеханики существенно образом отличается от классической механики.

Целевая направленность биомеханики

Цель изучения биомеханических закономерностей двигательных действий человека заключается:

- оценка эффективности действия приложенных сил для более *совершенного решения двигательной задачи*;

– выявление возможностей и путей *совершенствования* техники соревновательных упражнений;

– научное обоснование *рациональной методики обучения* двигательным действиям на основе биомеханического анализа техники реально исполняемых и синтезированных на ПЭВМ упражнений.

Цель изучения учебного курса биомеханики на факультете физического воспитания:

– ознакомить студентов с общими основами биомеханики как науки о движениях человека;

– дать необходимые сведения по биомеханическому обоснованию использования физических упражнений в физическом воспитании;

– вооружить знаниями, необходимыми для эффективного применения физических упражнений в качестве средства физического воспитания, повышения технического мастерства спортсменов и уровня спортивных достижений.

Системно-структурный подход исследования в биомеханике

Биомеханика, как наука о движениях человека, основывается на системно-структурном подходе изучения и понимания двигательных действий. Системно-структурный подход исследования позволяет:

1. Рассматривать тело человека как *движущуюся систему*.

2. Рассматривать процесс движения как *развивающуюся систему*.

В теории структурности движений заложены следующие основные принципы:

1) принцип *структурности* построения систем движений – все движения в системе взаимосвязаны, что определяет целостность и совершенство действия;

2) принцип *целостности* действия – все движения в двигательном действии образуют единое целое. Изменения в одном движении, так или иначе, влияют на всю систему;

3) принцип *иерархичности* – отдельные структуры являются составными частями более крупных структур;

4) принцип сознательной *целенаправленности* систем движений – человек сознательно ставит цель двигательного действия, применяет целе-

сообразные движения и управляет ими для эффективного достижения поставленной цели.

1.2. Формы движения материи.

Естественные и целенаправленные движения

Рассматривая биомеханику как науку, изучающую закономерности механического движения живых систем, целесообразно рассмотреть основные понятия о движении вообще и особенности движений человека, в частности.

Движение – одна из форм существования материи и оно так же многообразно, как многообразен мир.

Как известно, Ф. Энгельс различал:

- 1) простые формы движения материи;
- 2) сложные, высшие формы движения материи.

Простые формы движения материи

Простые формы движения материи включают в себя следующие:

- механическое движение;
- физическое движение;
- химическое движение.

Рассматриваемые формы движения материи проявляются как в живой, так и в неживой природе.

Механическое движение проявляется в перемещении объектов в пространстве и во времени. Физическое движение – изменение физических свойств материи. Например, изменение температуры, электрического сопротивления, объема, плотности, состояния и т.п. Химическое движение обусловлено происходящими в материи химическими реакциями.

Сложные формы движения материи

К сложным, высшим формам движения материи относятся:

- биологическая;
- социальная.

Биологическая форма движения материи характеризует развитие живых систем в онтогенезе и в филогенезе, в частности, человека и животного мира. Социальная форма движения материи (общественные отношения, мышление) присуща только человеку.

Каждая сложная форма движения материи всегда включает в себя более простые формы. Простейшая форма движения материи – механическая, – существует везде. Чем выше форма, тем менее значима механическая форма движения материи.

Двигательные действия человека, изучаемые биомеханикой, включают в себя механическое движение. Конечный результат движения – *цель двигательного действия* (переместить снаряд, партнера, переместиться самому и т.п.). Но механическое движение человека включает в себя более высокие формы движения. Поэтому биологическая механика (биомеханика) шире и намного сложнее, чем механика неживых систем.

Чем выше форма движения материи, тем труднее выполнить прогноз ее эволюции. Можно заранее рассчитать траекторию движения спутника, предсказать его поведение на орбите, но задача несоизмеримо усложняется при прогнозе «предсказания событий» в социальной форме движения материи, в сфере общественных отношений.

Естественные и целенаправленные движения

Классификация механической формы движения материи на естественные и целенаправленные была предложена отечественным ученым В.Г.Корневым в 1974 г. С позиций биомеханики, предложенная классификация корректна и обоснована. Сущность проявления «естественности» и «целенаправленности» в движениях объекта проявляется в следующем.

Если движущийся объект *не вырабатывает управляющих воздействий* для достижения цели движения, то такое движение является *естественным*. Примером естественных движений являются движения планет в солнечной системе, полет спортивных снарядов (копье, диск, молот, ядро) и т.п.

Если со стороны движущегося объекта *вырабатываются управляющие силы* для изменения траектории движения и достижения цели, то такое движение трактуется как *целенаправленное*.

Движения человека, как самоуправляемой биомеханической системы, относятся к подклассу целенаправленных движений. Для достижения цели движения человек вырабатывает управляющие воздействия (сила тяги мышц), изменяя и формируя тем самым траекторию движения.

В понятии о целенаправленных движениях присутствует философская категория: *цель движения*. Цель движения можно сформулировать различным образом:

- в содержательно-смысловой форме;
- в математической форме.

Содержательно-смысловая постановка цели движения и двигательной задачи

Содержательно-смысловая формулировка цели движения предполагает описание того движения, которое необходимо выполнить и его *конечный результат*. Например: сделать выпад правой вправо, выполнить прыжок в длину с места толчком двумя, выполнить прыжок вверх толчком левой и т.п.

Иначе говоря, *конечный результат двигательного действия* содержит в себе *цель движения*. *Цель движения характеризует качество выполнения двигательного задания*. Например:

1. Выполнить прыжок в длину с места толчком двумя *как можно дальше*.
2. Выполнить прыжок вверх с места толчком двумя *как можно выше*.
3. Пробежать 100 метров *как можно быстрее*.
4. Проплыть 100 метров *за минимально возможное время*.

В этих примерах качественная картина движений описывается терминами: *дальше, выше, быстрее* и т.п. В математической теории оптимизации динамических систем качество исследуемого процесса представлено *функционалом*, заданным в виде математической конструкции определенного вида. Поэтому, можно сказать, что если цель движения задана в математических терминах, то *цель движения* есть *функционал* двигательного действия.

Двигательная задача, в отличие от цели движения, может ставиться для отдельных фаз упражнения и для всего упражнения в целом и указывать или математически описывать те явления, которые должны произойти или не произойти в процессе выполнения двигательного действия. Например, при выполнении большого оборота назад на перекладине формулируется *цель движения*: в момент прохождения общим центром масс (ОЦМ) тела спортсмена вертикального положения над опорой *достичь максимальной линейной скорости ОЦМ*. *Двигательная задача* для рассматриваемого гимнастического упражнения ставится следующим образом:

1. До момента прохождения ОЦМ исполнителя вертикального положения под опорой звенья тела спортсмена должны быть расположены на одной прямой.

2. После прохождения ОЦМ исполнителя вертикального положения под опорой выполнить сгибательные движения в суставах таким образом, чтобы:

- сгибание начиналось с дистальных суставов;
- амплитуда сгибательных движений в плечевых суставах не превышала 30° ;
- амплитуда сгибательных движений в тазобедренных суставах не превышала 45° ;
- в вертикальном положении над опорой звенья тела спортсмена должны быть расположены на одной прямой.

Таким образом, двигательная задача, представленная в рассматриваемом примере пунктами 1–2, регламентирует технику большого оборота назад на перекладине и указывает на то, что должно произойти или не произойти в процессе выполнения упражнения. По сути дела здесь накладываются определенные *ограничения на кинематику* движения.

Математическое представление цели движения и двигательной задачи (формализация)

Содержательно-смысловую формулировку цели движения и двигательной задачи всегда можно формализовать (дать математическое представление), в частности, представив их в виде биомеханических характери-

стик в математической форме. Например, выразить биомеханические характеристики движения математическими символами:

- длина прыжка – S .
- высота прыжка – H .
- скорость бега – V .
- время бега – T .

Формализовать качество решения двигательной задачи можно с помощью экстремальных параметров биомеханических характеристик: минимум (min), максимум (max) функции. Например, для вышерассмотренных примеров формализованная запись качества (F) решения двигательной задачи имеет вид:

- Максимальная длина прыжка – $F = S (max)$.
- Максимальная высота прыжка – $F = H (max)$.
- Максимальная скорость бега – $F = V (max)$.
- Минимальное время бега – $F = T (min)$.

Возможность формализации цели движения и качества решения двигательной задачи позволяет использовать средства компьютерной техники для построения *оптимальной* (самой наилучшей) техники соревновательных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ.

1.3. Общая задача и частные задачи биомеханики

В биомеханике выделяют две группы задач, решение которых определяет ее содержание – теорию и метод:

- общая задача биомеханики;
- частные задачи биомеханики.

Общая задача охватывает *всю область* теории биомеханики в целом; **частные** же задачи важны при изучении *конкретных* вопросов исследуемых явлений.

Общая задача биомеханики

Общая задача изучения движений человека состоит в оценке эффективности действия внешних и внутренних сил для более совершенного до-

стижения цели движения. Технология решения общей задачи биомеханики включает в себя три этапа:

1. Определить *все силы*, действующие на тело спортсмена в процессе выполнения двигательного действия.

2. Выделить *силы*:

– которые оказывают *положительное воздействие* на достижение цели движения и эффективное решение двигательной задачи;

– которые оказывают *отрицательное воздействие* на достижение цели движения и эффективное решение двигательной задачи.

3. Сконструировать такую технику изучаемого упражнения, при которой действие сил, оказывающих *положительное воздействие* на формирование рациональной структуры движения, будет *максимальным*, а действие тех сил, которые оказывают *отрицательное воздействие* – *минимальным*.

Рассмотрим следующий пример. Допустим, спортсмен выполняет большой оборот назад на перекладине (рис.1.1). Ставится *цель движения*: в момент прохождения вертикального положения над опорой приобрести максимально возможную скорость звеньев тела.

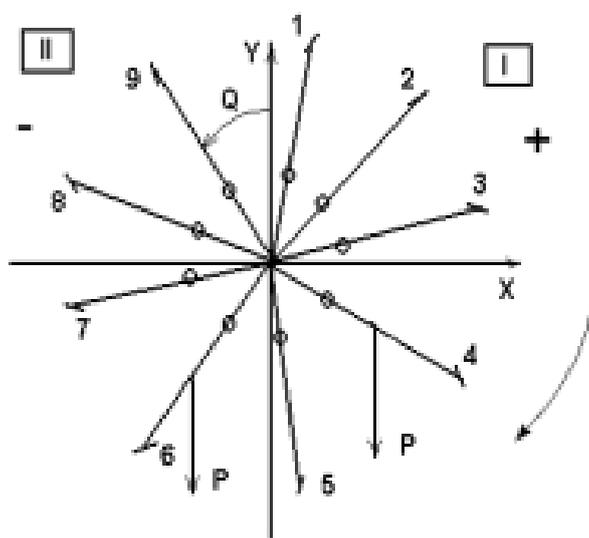


Рис. 1.1. Большой оборот назад на перекладине

В первой половине оборота (I), на тело спортсмена оказывают действие силы: сила тяжести (P), момент силы трения кистей рук гимнаста о гриф перекладины, сопротивление внешней среды. Во второй половине

оборота (II) на тело гимнаста действуют эти же силы. Допустим, гимнаст выполняет движение выпрямленным телом на всей траектории оборота. В первой половине оборота *сила тяжести* оказывает *положительное воздействие*: она разгоняет звенья тела спортсмена (+) и к моменту прохождения вертикального положения под опорой спортсмен приобретает максимальную скорость.

Во второй половине оборота *эта же сила* оказывает *отрицательное воздействие*: сила тяжести тормозит (-) звенья тела спортсмена. Совокупное тормозящее действие моментов силы тяжести и силы трения кистей рук гимнаста о гриф перекладины приведут к тому, что гимнаст, не доходя примерно 30° до вертикального положения над опорой (угол Q), остановится, что не позволит ему успешно решить двигательную задачу.

Анализ решения общей задачи биомеханики в исследуемом упражнении показывает, что для *увеличения положительного действия момента силы тяжести* в первой половине оборота необходимо выполнять движение *выпрямленным телом* (руки, туловище, ноги располагаются на одной прямой) для того, чтобы положительная работа момента силы тяжести на всей траектории оборота была наибольшей.

Для *уменьшения отрицательного воздействия момента силы тяжести*, во второй половине оборота, гимнасту *необходимо выполнить сгибаемые движения рук в плечевых и ног в тазобедренных суставах*, что позволит приблизить общий центр масс звеньев тела спортсмена к опорной вертикали и поддержать набранную скорость.

Частные задачи биомеханики

Частные задачи биомеханики состоят в изучении следующих основных вопросов:

1. Строение, свойства и двигательные функции тела спортсмена.
2. Рациональная спортивная техника.
3. Техническое совершенствование спортсмена.

Первая группа частных задач направлена на выяснение вопроса об особенностях строения опорно-двигательного аппарата, его механических и функциональных свойств, особенностях работы мышечного аппарата.

Вторая группа задач ориентирована на изучение ныне существующей техники соревновательных упражнений, а также на разработку новой, более рациональной техники для конкретного исполнителя.

– Третья группа задач – биомеханическое обоснование технической подготовки спортсменов, подразумевает:

– определение особенностей и уровня двигательной и физической подготовленности тренирующихся;

– построение оптимальной (наилучшей) спортивной техники;

– подбор вспомогательных упражнений и создание тренажеров для специальной физической и технической подготовки;

– оценка и контроль эффективности применяемых методов тренировки.

1.4. Взаимосвязь биомеханики с другими учебными дисциплинами

Биомеханика, как одно из научных направлений, опирается на теоретические данные ряда смежных наук и собственными исследованиями обогащает их. Первоначально биомеханика развивалась как раздел *биофизики*, возникший на стыке *физических* и *биологических* областей знаний. Постепенно биомеханика, как одна из биологических наук нового типа, сближается по методам исследования с точными науками. И, в настоящее время, по реестру научных направлений, *биомеханика* относится к *техническим наукам* (раздел – механика).

Можно выделить следующие основные научные направления, с которыми тесно связана биомеханика:

1. *Биологические науки:*

– анатомия;

– спортивная морфология;

– физиология физических упражнений.

2. *Технические науки:*

– аналитическая механика и устойчивость движения;

– динамика механических систем;

- теория управления движением;
- теория машин и роботов.

3. Физико-математические науки:

Математика:

- дискретная математика;
- дифференциальные уравнения;
- математическая кибернетика.

Информатика:

- математическое моделирование;
- теория оптимизации;
- теория программирования.

4. Педагогика.

Анатомия, спортивная морфология, физиология физических упражнений содействуют пониманию конкретных специфических особенностей *формы, строения и функции тела человека*.

Идеи и подходы технических наук обогащают *механико-математический аппарат* биомеханики для анализа и синтеза движений биомеханических систем, дают необходимое обоснование в области *теории управления двигательными действиями*.

Математические дисциплины и информатика вооружают исследователей в области биомеханики двигательных действий собственными методами исследований, хорошо разработанными в данных областях науки. В настоящее время, особенно широкое применение в биомеханических исследованиях находят различные *вычислительные алгоритмы кинематических и динамических характеристик* физических упражнений с помощью средств компьютерной техники. С помощью специальных компьютерных программ материалы видеосъемки соревновательных упражнений оцифровываются и записываются в память ПЭВМ, что позволяет, в дальнейшем, использовать их в качестве исходных данных для вычисления биомеханических характеристик исследуемых упражнений.

Методы обучения, разработанные и принятые на вооружение в педагогике, успешно используются биомеханикой для разработки *эффективных методов обучения двигательным действиям*.

Связь биомеханики с другими научными направлениями имеет двусторонний характер, обеспечивающий взаимное обогащение теории и методов исследования.

Метод биомеханики – это способ исследования, путь познания закономерностей двигательных действий в биомеханике. Теория биомеханики дает обоснование ее методу, метод же определяет возможности получения новых данных о биомеханике исследуемых упражнений.

В наиболее общем виде *метод биомеханики* имеет в своей основе:

- системный анализ;
- системный синтез.

1.5. Характеристика анализа движений биомеханических систем, как метода биомеханики

Рассматривая сложное двигательное действие, необходимо мысленно выделить в этой системе ее составные элементы, установить *состав* элементов системы.

Выделение состава элементов системы – этап познания целостности двигательного действия. Биомеханика, как наука экспериментальная, опирается на опытное изучение движений. При помощи биомеханических методов исследования регистрируются количественные особенности двигательных действий (*биомеханические характеристики*), которые *позволяют различать движения*, отличить одно движение, элемент, деталь от другого, сравнивать их между собой. Рассматривая характеристики, мысленно *расчленяют систему движений на составные элементы, части*; таким образом, устанавливают ее состав. В этом заключается *системный анализ действий*.

Биомеханический анализ направлен на выявление биомеханических закономерностей движений. В основу биомеханического анализа положено представление о *структурности движений* в двигательном действии человека. Исходя из принципа структурности, намечается *определенная последовательность описания и объяснения движений*.

Единая последовательность операций вряд ли может быть рекомендована при различных задачах исследования. Однако в качестве основной

схемы анализа в каждом конкретном случае можно принять следующую схему:

1. *Определение характеристик.* По биомеханическим характеристикам движений судят об их выполнении. Эти характеристики регистрируют, данные регистрации обрабатывают, сопоставляют, анализируют.

2. *Установление двигательного состава.* Основываясь на проанализированные биомеханические характеристики определяют *элементы* движений:

– *Главные и корректирующие управляющие движения* (суставные движения звеньев и систем звеньев).

– *Динамическая осанка* – движение с сохранением позы спортсмена.

– *Фазы движений* (временная форма организации элементов двигательного действия).

Устанавливают: из каких положений и в каких суставах выполняется движение, в каких направлениях и с какой амплитудой; какова последовательность и согласованность сгибательно-разгибательных движений спортсмена в суставах в пространстве и во времени. Иначе говоря, определяют внешнюю картину движения в целом.

Параллельно вычленяют и составные части движений звеньев:

– подготовительная фаза;

– рабочая фаза;

– заключительная фаза.

3. *Анализ структуры движений.* Установив состав движений, основное внимание переключают на установление *структуры* движений (способ взаимодействия элементов и подсистем системы):

– *Кинематическая структура* (пространственная, временная, пространственно-временная, ритмическая, фазовая, координационная).

– *Динамическая структура* (силовая, энергетическая, инерционная).

– *Вещественная структура* (анатомическая – опорно-двигательный аппарат тела человека).

– *Управляющая структура* (информационная, сенсорная, психологическая, эффекторная).

4. *Оценка эффективности* движений. Устанавливают насколько успешно решена двигательная задача и какова «стоимость» ее решения, насколько рационально достигнута цель движения.

1.6. Характеристика синтеза движений биомеханических систем как метода биомеханики

Система движений как целое не просто сумма ее составляющих. Горсть гороха, рассыпанная по столу – не система. В системе все ее элементы подчинены определенным *связям*:

1. *Физические связи*, посредством которых осуществляется конструктивная связь элементов системы. Например, физическая связь сегментов тела спортсмена осуществляется с помощью суставов (пространственное расположение элементов системы – вещественная система – опорно-двигательный аппарат тела человека).

2. *Формализованные физические связи* – описание физических связей математическим аппаратом, который математически описывает координаты суставов сегментов тела человека с использованием *обобщенных координат* (углы наклона звеньев тела спортсмена к оси *Ox* декартовой системы координат) и *длины сегмента*.

3. *Законы механики* – отражают в формульных выражениях зависимость кинематических характеристик от динамических характеристик движения, например, в форме *математической модели* движения неразветвленной биомеханической системы в условиях опоры.

Многочисленные взаимосвязи, объединяющие части системы, придают системе новые свойства, не свойственные ее частям качества (*системные свойства*). Изучая изменения количественных характеристик, выявляют, как элементы влияют друг на друга и систему в целом, определяют причины целостности системы. В этом и проявляется *системный синтез двигательного действия*.

Используя компьютерную технику, можно с помощью имитационного моделирования движений человека на ПЭВМ вычленить отдельные суставные движения, выявить их роль и вклад в формирование той или иной траектории движения, найти оптимальную технику для конкретного исполнителя в зависимости от его роста-весовых (антропометрических) характеристик и уровня развития физических качеств (силового потенциала, в частности).

Синтез движений спортсмена выполняется как на *теоретическом уровне* (математическое моделирование движений человека на ПЭВМ),

так и практически в процессе овладения техникой изучаемого упражнения.

Контрольные вопросы

1. Что является объектом познания и областью изучения в биомеханике?
2. В чем проявляется системно-структурный подход исследования движений в биомеханике?
3. В каких компонентах простые формы движения материи отличаются от сложных форм?
4. В чем принципиальное отличие естественных движений от целенаправленных и к какому из этих подклассов движений относятся двигательные действия человека?
5. В чем проявляется сущность цели движения и каким образом формулируется цель движения?
6. Какие три этапа включает в себя технология решения общей задачи биомеханики?
7. В каких аспектах рассматривается содержание частных задач биомеханики?
8. Какие научные дисциплины являются смежными с биомеханикой?
9. В чем проявляется сущность одного из методов биомеханики – системный анализ?
10. В чем проявляется сущность одного из методов биомеханики – системный синтез?

2. БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В биомеханических исследованиях, в том числе и при исследовании рациональных форм техники соревновательных упражнений, условно различают три этапа:

1. Регистрация данных (биомеханических характеристик).
2. Обработка результатов регистрации.
3. Биомеханический анализ.

Регистрация характеристик движений человека и движимых им тел выполняется с целью получения количественных характеристик исследуемого двигательного действия.

Обработка данных (результатов регистрации) позволяет получить новые данные, которые не были непосредственно зарегистрированы. Например, по данным перемещения звеньев тела спортсмена (пройденного пути) и времени, затраченного на этот путь, вычисляют скорость и ускорение.

Биомеханический анализ направлен на установление биомеханических закономерностей построения техники исследуемых упражнений, на обоснование выводов и рекомендаций.

В биомеханике выделяют две большие группы биомеханических методов регистрации двигательных действий:

- оптические методы регистрации движений;
- инструментальные методы регистрации движений.

К основным оптическим методам регистрации движений относятся:

- кинопередача (киносъемка);
- фотопередача (фотоциклосъемка);
- светодиодная фотоциклосъемка;
- стробоскопическая фотоциклосъемка;
- видеоманетометрическая запись движений;

К основным инструментальным методам регистрации движений относятся:

- электротензометрия;

- вектординамография;
- электромиография;
- электрогониография;
- спидография, акселерография.

2.1. Оптические методы регистрации движений

2.1.1. Киносъемка

Кинорегистрация (киносъемка) производится путем экспозиции на последовательные участки киноплёнки (кинокадры), перемещающейся в кинокамере. В дальнейшем киноплёнка может быть использована:

- 1) для *демонстрации* на экране отснятых упражнений.
- 2) для выполнения *промера* упражнения с целью получения численных значений биомеханических характеристик двигательного действия.

На каждом кинокадре фиксируется лишь одно положение, по которому можно определить:

- позу спортсмена и координаты избранных точек (суставы) тела;
- момент времени, к которому соотносится тот или иной кинокадр.

Для определения позы и координат точек тела спортсмена предварительно выполняется *промер* упражнения. Технология выполнения промера заключается в следующем.

1. Киноплёнку вставляют в фотоувеличитель, устанавливают начальный кинокадр выполнения упражнения и проецируют его на лист миллиметровой бумаги, расположенный на столе перпендикулярно фотопроекции кинокадра.

2. На листе миллиметровой бумаги отмечают перпендикулярными линиями расположение внешней системы отсчета (неподвижное тело – оконный проем, спортивный снаряд в гимнастике, растяжки и торец грифа перекладины и т.п.).

3. Передвижением киноплёнки в фотоувеличителе совмещают избранную внешнюю систему отсчета с системой отсчета на листе миллиметровой бумаги.

4. Отмечают крупными точками каждый сустав звеньев тела спортсмена на листе миллиметровой бумаги (для одного кинокадра).

5. Соединяют линиями отмеченные на листе бумаги точки (суставы) и место контакта опорного звена с опорой (если упражнение выполнялось в условиях опоры).

6. Перемещают в фотоувеличителе киноплёнку упражнения на один следующий кинокадр и совмещают избранную внешнюю систему отсчёта кинокадра с системой отсчёта на листе миллиметровой бумаги. На листе миллиметровки отмечают номер кинокадра.

7. Повторяют пункты 4-5-6 до окончания выполнения упражнения или до того кинокадра, на котором следует завершить выполнение промера в соответствии с задачами исследования.

Полученная в результате выполнения промера кинематическая схема расположения звеньев тела спортсмена называется *кинетограммой* упражнения. Иначе говоря, кинетограмма представляет собой модель траектории реального движения. Считанные *координаты суставов* заносят в специальную таблицу, для вычисления, в дальнейшем, численных значений биомеханических характеристик исследуемого упражнения.

Дополнительно, по промеру, определяют *углы наклона звеньев* тела спортсмена к оси *Ox* декартовой системы координат (*обобщенные координаты*).

Условия кинорегистрации:

1. Предварительно разрабатывается схема расположения киноаппаратуры относительно места выполнения упражнений (оптическую ось объектива аппарата располагают перпендикулярно плоскости снимаемого движения).

2. Выполняют маркировку (разметку) фона и объекта съёмки. Обычно для всех видов съёмки используют в качестве фона полотно белого или черного цвета с нанесенными на нем перпендикулярными полосами черного или белого цвета (противоположными цвету фона). На суставы спортсмена крепятся кружки лейкопластыря (или две перпендикулярные полоски лейкопластыря) с нанесенными на них черными отметками, которые на промере и представляют собой проекцию центра сустава.

3. Для получения точного масштаба фотографируют масштабную линейку, помещенную в плоскости движения или расположенную на фоне. С этой же целью можно предварительно измерить длины звеньев (сегментов) тела спортсмена.

4. Определяют условия освещения и скорость снимаемого объекта для выбора чувствительности пленки и времени экспозиции.

2.1.2. Фотоциклосъемка

На тело испытуемого (проекции центров суставов) прикрепляются светящиеся лампочки накаливания. При однократной экспозиции получается одиночный фотоснимок (фотография). Если держать затвор фотоаппарата открытым в течение всего движения, то на негативе получаются непрерывные траектории точек (*фотограмма*). Для лучшей ясности и четкости изображения съемку желательно выполнять в затемненном помещении.

По фотограмме невозможно определить временные характеристики движения и в силу этого рассматриваемый метод регистрации движений был модифицирован, когда на одном негативе можно получить двойной (тройной и т.д.) фотоснимок (несколько положений). Этот метод получил название «*фотоциклосъемка*». Технология выполнения фотоциклосъемки следующая:

1. Перед объективом фотоаппарата расположен вращающийся диск (обтюратор) с прорезями. Выдержка фотоаппарата по времени установлена на длительность выполнения снимаемого движения.

2. Вращающемуся диску задают определенную скорость вращения. В тот момент времени, когда прорезь диска пересекает ось объектива фотоаппарата на пленке «запечатлевается» движение.

3. На фотопленке получают *хронофотограмму* – ряд изображений на одной и той же пленке через равные интервалы времени. Хронофотограмму называют также и *циклограммой*.

Промер упражнения выполняется также, как и с использованием кинопленки.

2.1.3. Светодиодная фотоциклосъемка

Киносъемка соревновательных упражнений имеет определенные погрешности, связанные с недостаточно точным определением частоты киносъемки. Если механический привод (пружина) или электрический привод (батарея) подвели, то киносъемка выполняется не в соответствии со стандартом задаваемой частоты киносъемки. К тому же необходимо учитывать и инерционность обтюратора кинокамеры и желательно включать кинокамеру на 2–3 с заранее по от-

ношению к времени начала выполнения упражнения, чтобы была достигнута необходимая частота киносъемки.

Если стандарт частоты киносъемки не был выдержан, то в результате вычислений по промеру угловой скорости и ускорения звеньев тела спортсмена и линейной скорости точек звеньев (суставы, центр масс звена или сегмента) получаются большие погрешности вычислений.

Светодиодная фотоцикло съемка освобождена от погрешности, связанной с недостаточно точным определением шага по времени экспозиции движения. Светодиоды, имеющие величину рисового зернышка, обладают свойством безынерционности, и частота их миганий (мерцаний) может достигать 1 миллиона герц в секунду. Поэтому, задавая с помощью определенного прибора частоту миганий светодиода, к примеру, 25 Гц в секунду, можно быть уверенным в точности воспроизведения временных интервалов светодиодной фотоцикло съемки.

Светодиоды, с помощью лейкопластыря прикрепляются к суставам испытуемого. Исследуемое упражнение снимается на фотоаппарат при максимально возможном сумеречном освещении. Выдержка устанавливается в соответствии с длительностью выполнения упражнения. На негативе фотопленки через равные промежутки времени, заданные определенной частотой мигания светодиодов, получают в виде точек изображения светодиодов. Так как светодиоды прикрепляются к суставам испытуемого, то при выполнении промера точки соединяют прямой линией и получают кинетограмму упражнения. Считывая координаты суставов, получают исходную таблицу чисел для вычисления, в дальнейшем, пространственно-временных характеристик изучаемого упражнения (угловые и линейные скорости и ускорения сегментов, звеньев и определенных точек сегментов и звеньев).

2.1.4. Стробоскопическая фотоцикло съемка

Стробоскопическая фотоцикло съемка выполняется на фотоаппарат с прерыванием внешнего источника света, падающего на объект съемки. В качестве внешнего источника света используют стробоскопические лампы накаливания, частоту миганий которых можно регулировать в большом диапазоне: до сотни и тысячи герц в секунду.

На одном негативе получают ряд поз освещенного человека – *стробофотограмму*. По конечному результату стробоскопическая фотоциклосъемка сходна с хронофотограммой фотоциклосъемки, выполняемой с применением обтюратора. Роль обтюратора, перекрывающего объектив фотоаппарата, в стробоскопической фотоциклосъемке выполняют стробоскопические лампы, которые можно гасить и включать с большой частотой.

Достоинством стробоскопической фотоциклосъемки является большая точность временных промежутков регистрации позы в движениях испытуемых, что позволяет получить и более точные данные о кинематической картине движения.

Промер упражнения выполняется так же, как и в фотоциклосъемке.

2.1.5. Видеоманитофонная запись движений

В настоящее время видеоманитофонная запись движений находит все более широкое применение. Технология ее проведения, по условиям установки видеокамеры, условиям освещенности, маркировки испытуемых и фона аналогична киносъемке упражнений.

Дальнейшие операции по использованию видеопленки просматриваются в двух направлениях:

1. Демонстрация видеопленки через видеоманитофон с остановкой в необходимом положении с помощью кнопки «стоп-кадр».

2. Оцифровка видеопленки с помощью компьютерной технологии и запись в видео файл, что позволяет в дальнейшем использовать полученный видео файл для выполнения *промера* упражнения (*считывание координат суставов исполнителя*) на компьютере с помощью стандартных графических редакторов. Например, с помощью стандартного графического редактора «Paint». Полученные в результате выполнения промера координаты суставов используются, в дальнейшем, для вычисления *кинематических* и *динамических* характеристик упражнений.

Однако очень широкого распространения второе направление использования видеоманитофонной записи движений в настоящее время еще не получило в виду дорогостоящего интерфейсного оборудования (например, видеоплата «Miro Video DC 10», необходимая для оцифровки видеоизображения, стоит около 200-220 долларов США).

2.2. Инструментальные методы регистрации движений

2.2.1. Электрическая тензометрия

В биомеханике метод *электрической тензометрии* применяется для регистрации силы реакции опоры при выполнении соревновательных упражнений. Широкое распространение метод электротензометрии получил для регистрации силы отталкивания в прыжках, ходьбе, беге, метаниях и многих других видах спорта.

Метод электрической тензометрии *основан на изменении электрических свойств датчиков (тензодатчиков) при деформации*. При деформации тензодатчика меняется его электрическое сопротивление, а, следовательно, и выходная величина электрического тока при постоянном напряжении, пропускаемого через тензодатчик. Тензодатчики наклеиваются на деформируемые спортсменом части снарядов (гриф штанги или перекладины, рукоять весла, ручка теннисной ракетки и т.п.) или на измерительные устройства (стальные кольца, пластины и др.).

Выходная величина тока регистрируется осциллографом и электрические сигналы, пропорциональные изменению величины силы реакции опоры, оставляют на экране осциллографа светящийся след в виде кривой, отражающей изменение величины силы реакции опоры. Для сопоставления величины изменения электронного луча и силы реакции опоры предварительно выполняют *тарировку* тензометрического устройства. Тарировку выполняют в несколько этапов:

1. Регистрируется начальный уровень электронного луча при отсутствии нагрузки на тензометрическом устройстве (перекладина, тензометрическая платформа и т.п.).

2. Регистрируется уровень электронного луча при определенной нагрузке на тензометрическое устройство. Например, спортсмен весом 70 кг принял вис на тензометрической перекладине, что вызвало смещение электронного луча на 5 см. Следовательно, смещение электронного луча на 1 см вызывается действием силы равной 14 кг ($14=70/5$).

3. Зависимость между величиной нагрузки и смещением электронного луча считается линейной (14 кг/см) и используется в дальнейшем для определения величины силы реакции опоры по измеренному на тензограмме смещению кривой относительно исходного уровня (при отсутствии нагрузки).

2.2.2. Вектординамография

Модификацией электротензометрии является метод *вектординамографии*, позволяющий регистрировать вертикальную и горизонтальную составляющие силы реакции опоры (взаимно перпендикулярные составляющие деформации тензометрической платформы или другого тензометрического устройства). Электрический сигнал, соответствующий горизонтальной составляющей исследуемого усилия, подается на горизонтальные пластины электронного осциллоскопа: сигнал, соответствующий вертикальной составляющей усилия, – на вертикальные пластины.

В результате одновременного воздействия двух сигналов электронный луч вычерчивает на экране след, отражающий годограф этих усилий (результатирующая силы реакции опоры). Следует отметить возможность получения на специальной бумаге твердой копии кривой электронного луча, что и позволяет в дальнейшем определить, по временным отметкам тензограммы и киносъемки упражнения, позу спортсмена и соответствующие данному положению спортсмена величину и направление приложенных к тензометрической платформе усилий.

2.2.3. Электромиография

Электромиография – метод регистрации электрической активности возбуждения мышц – применяется для определения *начала и окончания мышечных усилий* и *величины их активности*.

Сущность методики (ЭМГ) состоит в регистрации контактным способом с поверхности мышцы (глобальные ЭМГ) или изнутри (локальные ЭМГ) разности потенциалов ее электрического поля. Для отведения глобальных ЭМГ применяют поверхностные посеребренные электроды, прикрепляемые к изучаемой мышце или группе мышц. Для регистрации локальных ЭМГ используют игольчатые электроды из платины.

Электрические потенциалы возбужденной мышцы (тысячные доли вольта) изменяются чрезвычайно быстро (тысячные доли секунды). Для их регистрации биопотенциалы мышц усиливают в тысячи раз и подают на безынерционный осциллограф.

На фотопленке или бумажной ленте одновременно регистрируются:

1. Электромиограммы группы мышц.
2. Отметка времени (обычно до 0,02 сек).
3. Предварительно записывается калибровочный сигнал, чтобы при дешифровке электромиограммы определить величины биопотенциалов.

Применение портативных усилителей позволяет записывать электромиограммы в сложных условиях выполнения соревновательных упражнений (прыжки с шестом, барьерный бег, сложные гимнастические упражнения на снарядах, плавание и др.) при высоких спортивных результатах.

Модификацией метода электромиографии является метод *телемиографии*, основанный на передаче по радио сигнала биопотенциала работающих мышц.

К недостаткам методики ЭМГ можно отнести невысокую точность измерений, что обусловлено, в частности, тем, что зависимость между электрической активностью мышцы и исследуемыми компонентами моторики спортсмена (мышечной деятельности) не линейна, что усложняет получение количественных характеристик мышечной деятельности.

2.2.4. Электрогониометрия

Гониометрией называется способ измерения суставных углов при помощи транспортира, скрепленного с линейкой.

Электрогониометрией называется способ измерения суставных углов при помощи датчика угловых перемещений.

Как правило, датчик угловых перемещений (типа ППЗ-43) представляет собой потенциометр, электрически связанный с регистрирующим прибором (самописцем) типа Н-700 или К-109. Основная погрешность данной методики заключается в изменении положения места закрепления потенциометра по отношению к измеряемому суставному углу, особенно при выполнении упражнений скоростно-силового характера. Эта погрешность может достигать 15–20%.

2.2.5. Спидография, акселерография

Спидография – метод регистрации скорости движущегося объекта (сегментов, звеньев и непосредственно перемещающегося тела спортсмена). Из из-

вестных приборов для регистрации скорости передвижения спортсмена наиболее распространенным является спидограф А.В.Абалакова. Принцип действия этого прибора основан на измерении с помощью тахометра скорости вращательного движения фрикционного шкива, приводимого в движение гибкой нитью, прикрепленной к перемещающемуся спортсмену.

Измерение скорости движения спортсмена с помощью акселерометра выгодно отличается от измерения скорости с помощью спидографа отсутствием связи спортсмена с регистрирующим (показывающим) прибором. При использовании интегрирующего акселерометра непосредственная механическая связь с показывающим прибором отсутствует.

Интегрирующий акселерометр, имеющий малый вес и габариты, прикрепляется к спортсмену, что позволяет при помощи телеметрического устройства измерять ускорения и скорость при любом движении, в том числе и криволинейном.

Запись скорости и ускорения производится либо на шлейфных осциллографах типа К-105, Н-320, Н-700, или более современных, например, Н-041, либо на самописце, к примеру, типа Н-320-5. Обработка результатов тестирования производится по тарировочной сетке вручную или с вводом необходимых данных в ПЭВМ.

Акселерометрия – метод измерения ускорения. В качестве регистрирующего прибора используется акселерометр или акселерограф.

Ускорение воспринимается маятниковым устройством, в котором при изменении скорости возникает отклонение маятника от положения равновесия (величину отклонения показывает стрелка на шкале, отградуированной в единицах ускорения).

В электромеханическом способе маятник связан непосредственно с тензодатчиком, изменяющим свой электрический параметр (сопротивление, индуктивность или емкость) в зависимости от механической деформации, пропорциональной ускорению.

Как правило, при проведении акселерометрических измерений используют следующий комплекс приборов:

1. Датчик ускорений.
2. Тензометрический усилитель (например, ТУ-ЧИ, ТОПАЗ, УТ-4-1, тензостанция УТС-12 и др.).
3. Регистрирующее устройство (например, Н-700, К-105, Н-320).

Основной аппаратурной погрешностью является неточность ориентации датчика и перемещение датчика на теле спортсмена, что может вызвать погрешность измерения в пределах 20–30%. Для проверки акселерометра промышленностью выпускается специальный «Виброэлектродинамический стенд» типа ВЭДС-10А.

Контрольные вопросы

1. Какие три этапа включает в себя биомеханическое исследование движений человека?
2. Какие две большие группы биомеханических методов регистрации двигательных действий существуют в настоящее время в биомеханике и что они в себя включают?
3. В чем различие между методами биомеханики и биомеханическими методами исследования?
4. Какова технология проведения киносъемки упражнений?
5. Чем фотоциклосъемка отличается от киносъемки?
6. Что такое «промер» упражнения и как он выполняется по киноматериалам киносъемки, фотоциклосъемки?
7. В чем заключается различие между фотоциклосъемкой и светодиодной фотоциклосъемкой?
8. В чем сущность стробоскопической фотоциклосъемки?
9. Какой из методов оптической регистрации движений приходит в настоящее время на смену киносъемке упражнений и каким образом этот метод стыкуется с компьютерными технологиями.
10. Какие биомеханические характеристики регистрируются с помощью электрической тензометрии и что такое «тарировка»?
11. Какой из инструментальных методов используется для регистрации электрической активности возбуждения мышц и в чем сущность данного метода?
12. С помощью каких инструментальных методов можно зарегистрировать пространственно-временные характеристики движений (угловые параметры, скорость, ускорение)?

3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАБОТЫ МЫШЕЧНОГО АППАРАТА

3.1. Биокинематические пары, цепи, степени свободы

Изучая движения человека необходимо знать, как устроен опорно-двигательный аппарат: его *пассивная* часть – кости и их соединения и *активная* – мышечная система. В биомеханических исследованиях невозможно учесть строение и функции тела во всех его особенностях (изменение момента инерции сегмента при мышечном сокращении, деформацию костной ткани, положение центра масс мышцы в расслабленном и напряженном состоянии и т.п.). Для изучения движений человека строят модель тела – *биомеханическую систему*.

Биомеханическая система обладает основными свойствами, существенными для выполнения двигательной функции, и не включает в себя множество частных деталей. Таким образом, *биомеханическая система – это упрощенная копия, модель тела человека, на которой можно изучать закономерности движений*.

Кинематические цепи. Множество частей тела, система звеньев, соединенных подвижно и образующих между собой кинематические пары – кинематические цепи. Кинематические пары и цепи – понятия заимствованные из теории механизмов и машин. В живых организмах их правильнее называть *биокинематическими*.

Биокинематическая пара – это подвижное (кинематическое) соединение двух соприкасающихся костных звеньев, в котором возможности движения определяются строением соединения и управляющим воздействием мышц. *Кинематическую пару* можно определить также как соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. В этом определении подчеркивается, что подвижность соединения звеньев состоит в возможности их относительного движения.

Строение соединений в биокинематических парах определяет *постоянные степени связи*, которые *ограничивают* движение в кинематической паре. Строение всех суставов (кроме одноосных) определяет также и то количество *степеней свободы*, которое оставляет *неопределенность* возможных движений.

Управляющие воздействия мышц накладывают дополнительные степени связи и оставляют только одну степень свободы (полносвязный механизм).

Следовательно, *управляющие воздействия мышц выделяют из множества возможных движений именно заданное управляемое движение*. Почти все биокинематические пары в основном *вращательные*; лишь немногие допускают чисто *поступательное* скольжение относительно друг друга и одна пара (голеностопный сустав) – *винтовое* движение.

Биокинематические цепи. Биокинематическая цепь – последовательное (или разветвленное) соединение ряда кинематических пар.

Все кинематические цепи подразделяются на *плоские* и *пространственные*. В плоской кинематической цепи при закреплении одного из звеньев все другие совершают плоское движение параллельное одной и той же неподвижной плоскости. На рис. 3.1 показаны кинематические цепи, в которых плоское движение получается при параллельности осей всех вращательных пар.

Выделяют следующие структуры биокинематических цепей (см. рис. 3.1):

- неразветвленные (А);
- разветвленные (Б, С);
- замкнутые (С, Б – нижняя часть кинематической цепи);
- незамкнутые (А, Б – верхняя часть кинематической цепи).

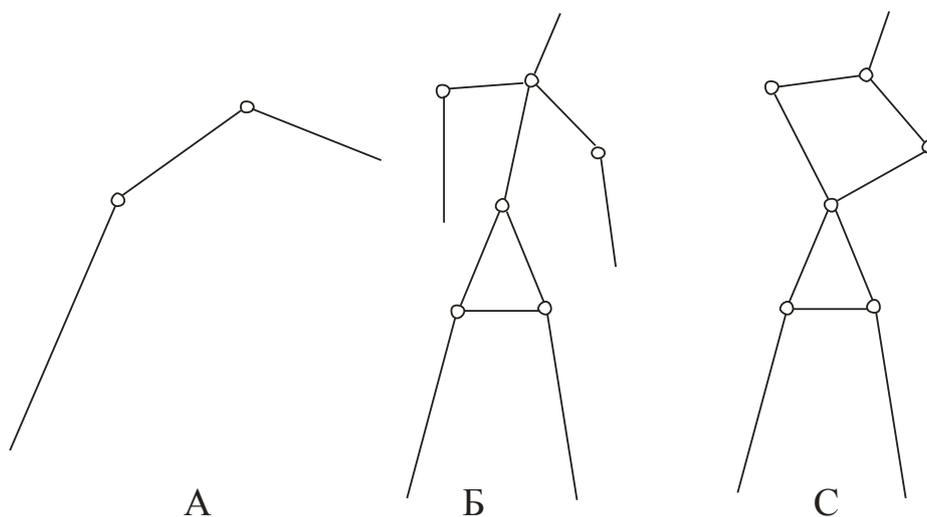


Рис. 3.1. Плоские кинематические цепи

В *незамкнутой* цепи имеется последнее («свободное») звено, входящее лишь в одну пару. В незамкнутой цепи возможны изолированные движения в каждом отдельном суставе. Например, вис на перекладине – неразветвленная, *незамкнутая* биокинематическая цепь. Ноги – свободное звено; в тазобедренных суставах возможны изолированные сгибательно-разгибательные движения.

В *замкнутой* цепи изолированные движения в одном суставе невозможны: в движение неизбежно вовлекаются и другие соединения. Незамкнутая цепь может стать *замкнутой*, если конечное свободное звено получит *связь* в виде:

1. *Опоры, захвата с другим звеном цепи.* Например, из стойки ноги врозь руки в стороны (руки – свободные звенья – незамкнутая цепь) – руки на пояс (цепь замкнулась, рис. 3.1, С).

2. *Опоры через какое-либо тело.* Например, в положении выпада две ноги замыкают цепь через опору.

Значительная часть незамкнутых биокинематических цепей оснащена многосуставными мышцами, и движения в одних суставах, через такие мышцы, связаны с движениями в других суставах. При точном управлении во многих случаях эту взаимную связь можно преодолеть, «выключить». В замкнутых же цепях такая связь непреодолима и *действия мышц передаются на отдаленные суставы.*

Степени свободы движения в биокинематических цепях. Число степеней свободы звена соответствует количеству его независимых перемещений:

- линейных;
- угловых.

Положение твердого тела, свободно движущегося в пространстве, полностью определяется шестью независимыми координатами, за которые можно принять три координаты начала подвижной системы координат, связанной с телом, и три угла Эйлера, определяющие расположение осей подвижной системы координат относительно неподвижной. Их принято называть *обобщенными*, так как они определяют положение всего твердого тела относительно неподвижной системы координат.

Если на физическое тело не наложено никаких ограничений (*связей*) оно может свободно перемещаться:

1. Относительно любой из трех взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат (*поступательное движение*) – три степени свободы.

2. Совершать *вращательное движение* относительно любой из трех взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат – три степени свободы.

Следовательно, свободное материальное тело имеет шесть степеней свободы, обуславливающих его возможное пространственное перемещение.

Каждая наложенная связь уменьшает количество степеней свободы:

1. Зафиксировав одну точку свободного тела, сразу лишают его трех степеней свободы – возможных поступательных (линейных) перемещений относительно трех осей декартовой системы координат. Например, в шаровидном суставе осталось три степени свободы из шести (вращательное движение относительно трех осей).

2. Закрепление двух точек тела оставляет одну степень свободы – вращательное движение тела относительно оси, проходящей через закрепленные точки. Пример подобного ограничения – одноосный сустав.

3. При закреплении тела в трех точках, не лежащих на одной прямой, тело полностью лишается свободы движения. Такое соединение к суставам не относится.

3.2. Трехзвенная модель опорно-двигательного аппарата тела человека

Многие соревновательные упражнения, например, в гимнастике, выполняются с использованием сгибательно-разгибательных движений в двух суставах. К примеру, большинство оборотовых упражнений на перекладине построено на выполнении сгибательно-разгибательных движений в плечевых и тазобедренных суставах. Поэтому при исследовании техники упражнений, построенных на сгибательно-разгибательных движениях в двух суставах, можно ограничиться использованием трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека. Однако в гимнастике существует также широкий класс движений с использованием сгибательно-разгибательных движений и в других суставах: лучезапястных, локтевых, коленных, голеностопных. Трехзвенная модель опорно-двигательного аппарата тела спортсмена в этом случае не способна решить задачу анализа движения с одновременным изменением угла сразу в нескольких суставах. С этой целью необходимо использовать модель, в которой

количество звеньев системы на единицу больше числа суставов, в которых происходят сгибательно-разгибательные движения.

Для построения расчетных моделей анализа движений биомеханических систем с произвольным количеством звеньев рассмотрим кинематическую схему трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека (рис. 3.2), в которой руки – первое звено, туловище с головой – второе, ноги – третье звено.

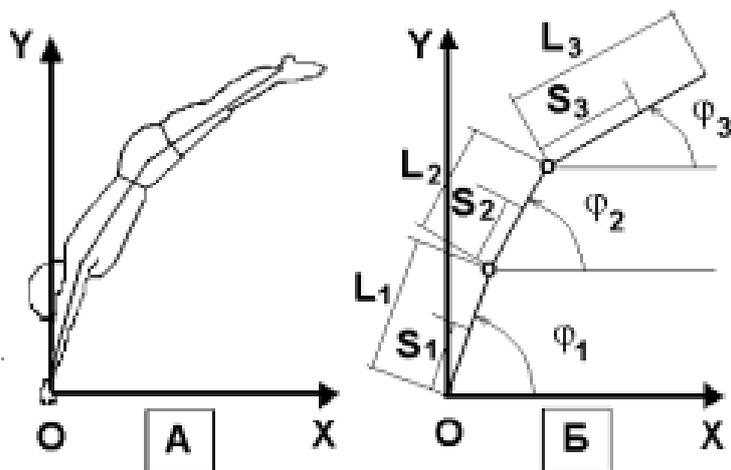


Рис. 3.2. Кинематическая схема трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека

С помощью данной модели можно исследовать кинематику и динамику вращательных движений спортсмена в условиях опоры. В процессе выполнения упражнений спортсмен не теряет контакта с опорой, к примеру, с грифом перекладины. Поэтому расположим кисти рук спортсмена в начале неподвижной системы координат Oxy , а ее в свою очередь совместим с торцом грифа перекладины.

На принятую модель наложены ограничения:

1. Звенья тела человека и гриф перекладины считаются абсолютно твердыми телами.
2. Суставы, посредством которых звенья тела человека соединяются друг с другом, моделируются цилиндрическими шарнирами.
3. Трение в шарнирах отсутствует.
4. Центры масс звеньев модели расположены на прямой, соединяющей их оси вращения в шарнирах.

Введем в кинематическую схему модели обозначения:

L_1 – длина первого звена;

L_2 – длина второго звена;

L_3 – длина третьего звена;

S_1 – расстояние от оси вращения (гриф перекладины) до центра масс первого звена;

S_2 – расстояние от оси вращения (плечевые суставы) до центра масс второго звена;

S_3 – расстояние от оси вращения (тазобедренные суставы) до центра масс третьего звена;

Φ_1 – угол, образованный первым звеном с осью Ox ;

Φ_2 – угол, образованный вторым звеном с осью Ox ;

Φ_3 – угол, образованный третьим звеном с осью Ox .

Для модели с произвольным количеством звеньев системы введем буквенную индексацию для обозначения номера звена. При этом индекс может быть выражен, если это не оговорено заранее, любой буквой латинского алфавита. Например, запись

$$X_i, X_j, X_z, \dots, X_s,$$

означает совершенно одно и то же, т.е. элемент под номером, соответствующим буквенному индексу одномерного массива X . Для принятой модели имеем:

L_i – длина i -го звена;

S_i – расстояние от оси вращения i -го звена до его центра масс;

Φ_i – угол наклона i -го звена к оси Ox ;

i – буквенный индекс, используемый для обозначения номера звена ($i = 1, 2, \dots, N$);

N – количество звеньев модели.

Как известно, в процессе выполнения соревновательных упражнений изменяется взаимное расположение звеньев биосистемы и положение тела в пространстве в определенные моменты времени. Допустим, координаты движущейся системы регистрируются с некоторым постоянным шагом по времени, равным Δt , а номер шага по времени равен k . В частности, за k можно принять номер кинокадра на промере. Необходимо для любого k -го номера кинокадра

определить кинематические характеристики движений для N -звенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека. Нас, по крайней мере, в первую очередь будет интересовать траектория следующих точек: центра масс отдельных звеньев модели и центра шарниров. Как будет видно из дальнейшего, выбор именно этих точек звеньев модели обусловлен алгоритмами построения расчетных моделей динамической структуры исследуемых упражнений.

3.3. Инерционность процесса мышечного напряжения

Биомеханические системы обладают рядом особенностей, отличающих их от закономерностей функционирования неживых объектов. В частности, управляющие воздействия человека с помощью вырабатываемых им внутренних сил (сила тяги мышц) вносят достаточно серьезные коррективы в биомеханику движений. К основным особенностям работы мышечного аппарата тела человека можно отнести следующие:

- инерционность процесса мышечного напряжения;
- зависимость «сила – суставной угол»;
- зависимость «сила – скорость»;
- факторы, влияющие на величину проявления мышечной силы.

Инерционность процесса мышечного напряжения проявляется в том, что *мышцы достигают максимального мышечного напряжения не мгновенно*, а в течение определенного промежутка времени. Рассмотрим проявление инерционности мышечного напряжения на следующем примере (рис. 3.3).

Допустим, по какому-либо сигналу (звуковой сигнал, визуальный, кинестезический и т.п.) спортсмену необходимо выполнить заранее известное двигательное действие. Будем считать, что момент времени подачи сигнала соответствует времени $t=t_0$ (рис. 3.3).

На момент времени начала подачи сигнала (t_0) мышечного сокращения еще не наступает. И связано это с тем, что сигналу необходимо определенное время, чтобы поступить в центральную нервную систему (ЦНС), пройти в ЦНС обработку и принять ею решение. Далее ЦНС необходимо подать команду на исполнительные органы (мышцы). И только в момент времени (t_1) начинается мышечное напряжение.

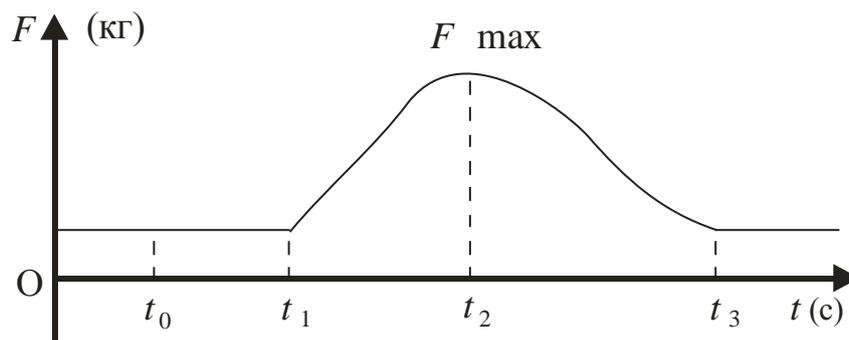


Рис. 3.3. Инерционность процесса мышечного напряжения

Разность времени $t_1 - t_0$ называется *латентным периодом двигательной реакции*. Численное значение латентного периода двигательной реакции у человека, не занимающегося спортом составляет 0,20–0,25 с. У высококвалифицированных спортсменов латентный период двигательной реакции значительно меньше – 0,13–0,16 с. Количественные показатели латентного периода двигательной реакции свидетельствуют о том, что латентный период двигательной реакции очень трудно поддается тренировочному воздействию. Так, например, для уменьшения времени латентного периода двигательной реакции на 0,1 с требуется 7–8 лет тренировочных занятий.

Для достижения максимального мышечного напряжения (F_{max}) необходимо определенное время. В среднем промежуток времени от начала мышечного напряжения (t_1) и до достижения времени максимального мышечного напряжения (t_2) равен 0,25–0,35 с. Время необходимое на расслабление ($t_3 - t_2$) в среднем на 0,1 с больше времени мышечного сокращения.

Инерционность процесса мышечного напряжения необходимо учитывать в спортивной практике. Например, если при выполнении размахиваний в висе на перекладине тренер замечает двигательную ошибку – позднее сгибание ног в тазобедренных суставах на махе вперед, и, руководствуясь этим, делает пояснение гимнасту о том, что в момент его (тренера) касания кистью руки области поясницы необходимо начинать выполнять сгибание, следует ориентироваться на следующее. Если тренер касается рукой занимающегося непосредственно в момент прохождения им вертикального положения под опорой, то этот сигнал будет подан с опозданием. Учитывая время латентного периода двигательной реакции, коснуться занимающегося необходимо за 30° – 40° до прохождения им вертикального положения под опорой.

Многие соревновательные упражнения по времени делятся меньше, чем время, необходимое для достижения максимального мышечного напряжения. К примеру, длительность отталкивания с мостика в опорных прыжках через гимнастического козла или коня составляет 0,15–0,18 с. И, если гимнаст, в момент времени $t=t_0$, выполняет наскок на мостик, и только в момент касания на мостик начинает развивать мышечные напряжения ног, направленные на отталкивание, то к моменту окончания толчка (рис. 3.4, Т) он не сможет развить максимальных мышечных усилий (рис. 3.4, А).

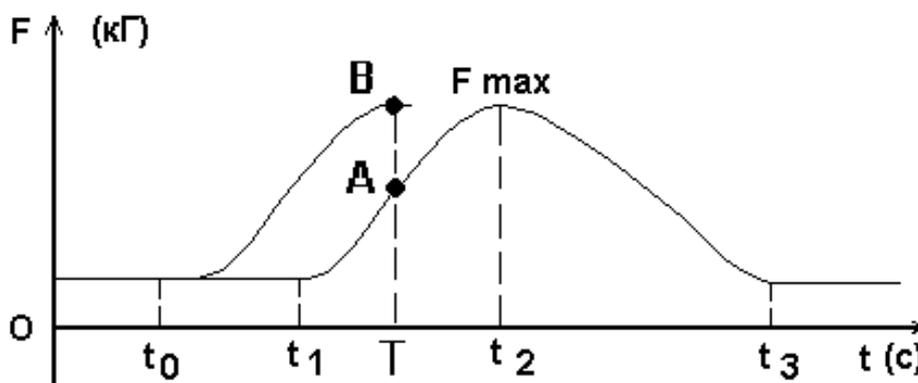


Рис. 3.4. Упреждающее по времени мышечное напряжение (В), совпадающее по времени (Т) с максимумом мышечного напряжения и моментом окончания отталкивания гимнаста с гимнастического мостика

Рассматриваемый механизм несовпадения момента времени окончания отталкивания и максимума мышечного напряжения объясняется тем, что время отталкивания существенно меньше времени необходимого на достижение максимального мышечного напряжения. Двигательная ошибка – наскок на «ватные» ноги и избежать этого можно *упреждающим по времени мышечным напряжением*. То есть в момент отталкивания толчковой ногой, в полетной части касания на мостик, необходимо уже начинать напрягать мышцы ног. И, к моменту касания гимнастического мостика, у гимнаста уже будет достигнут определенный уровень мышечного напряжения разгибателей голени, бедра, стоп. В данном случае, *упреждающее по времени мышечное напряжение* будет способствовать совпадению момента времени отталкивания с мостика с моментом времени достижения максимального мышечного напряжения (рис. 3.4, В).

3.4. Зависимость «сила – суставной угол»

На величину проявления мышечной силы влияют многие факторы. Один из них проявляется в том, что величина мышечного усилия зависит от величины суставного угла. И здесь следует иметь в виду, что для различных суставов эта зависимость – различная. Например, на рис. 3.5 показана зависимость величины развиваемых гимнастами 19–23 лет моментов мышечных сил в плечевых суставах.

Угол в плечевых суставах измерялся по отношению расположения рук к туловищу. В положении руки вверху – угол между руками и туловищем равен 180° , руки вдоль туловища – 0° , при отведении рук назад – минусовое значение угла в плечевых суставах.

Из рисунка видно, что максимальные мышечные усилия, направленные на уменьшение угла между руками и туловищем (*сгибатели плеч*) спортсмены развивают при угле в плечевых суставах равном 180° . С уменьшением величины угла уменьшается и проявляемая спортсменом сила тяги мышц. *Для сгибателей плеч – зависимость прямая* (чем меньше угол – тем меньше развиваемая сила тяги мышц).

Для разгибателей плеч – зависимость обратная (чем меньше угол – тем больше развиваемая сила тяги мышц). Эти факты необходимо учитывать в тренировочном процессе.

Допустим, спортсмен изучает большой оборот назад на перекладине. Рабочая функция, осуществляемая *мышцами сгибателями плеч* после прохождения гимнастом вертикального положения под опорой, выполняется в зоне изменения суставного угла в плечевых суставах от 180° до 130° (амплитуда сгибания рук в плечевых суставах равна 50°).

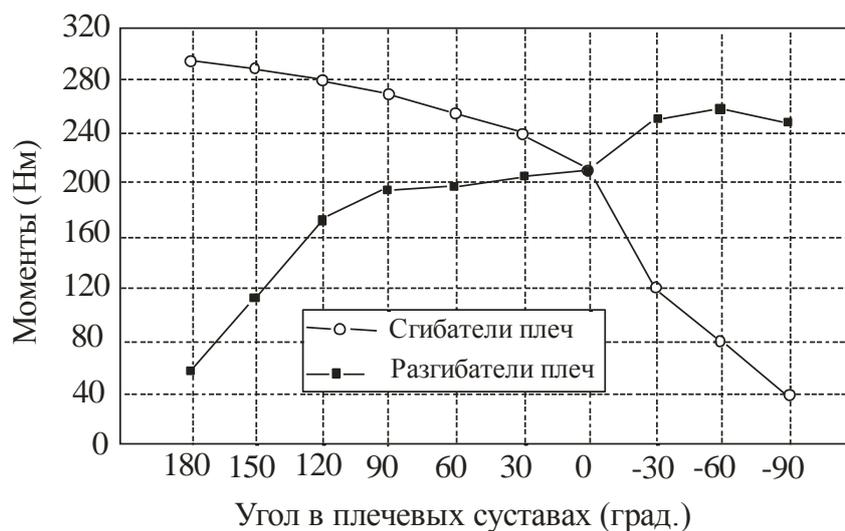


Рис. 3.5. Моменты мышечных сил сгибателей и разгибателей плеч (по данным О.И.Загrevского, 1999)

Предположим также, что гимнаст не обладает достаточным силовым потенциалом, позволяющим приступить к освоению рассматриваемого гимнастического упражнения. Будет ли в этом случае эффективным рассматриваемое ниже специальное подготовительное упражнение?

1. Из положения, лежа на спине руки вдоль туловища, в руках гриф штанги с дополнительным отягощением, поднять руки до вертикального положения. Вернуться в исходное положение.

Биомеханический анализ условий выполнения предложенного специально-подготовительного упражнения показывает его неэффективность:

во-первых, изменение суставного угла в плечевых суставах при выполнении подготовительного упражнения осуществляется в диапазоне от 0° в исходном положении и до 90° в конечном положении (руки вертикально), что не соответствует кинематической структуре изменения суставного угла в изучаемом упражнении.

во-вторых, подготовительное упражнение направлено для развития силы мышц – разгибателей плеч, а не сгибателей.

Отсюда следует вывод о том, что специально-подготовительные упражнения по своей кинематической и динамической структуре должны соответствовать биомеханической структуре изучаемого упражнения. Это – так называемое

мый, принцип сопряженного воздействия. Эффективным специально-подготовительным упражнением для рассматриваемого примера является:

2. Упражнение №1, но выполняемое из положения, лежа, руки вверх (по отношению к туловищу). В этом случае принцип сопряженного воздействия будет корректно соблюден.

3.5. Зависимость «сила – скорость»

Другим фактором, определяющим величину проявляемой человеком мышечной силы, является зависимость «сила – скорость». Здесь под скоростью понимается не скорость перемещения звена, а скорость сгибательно-разгибательных движений в суставах (рис. 3.6).

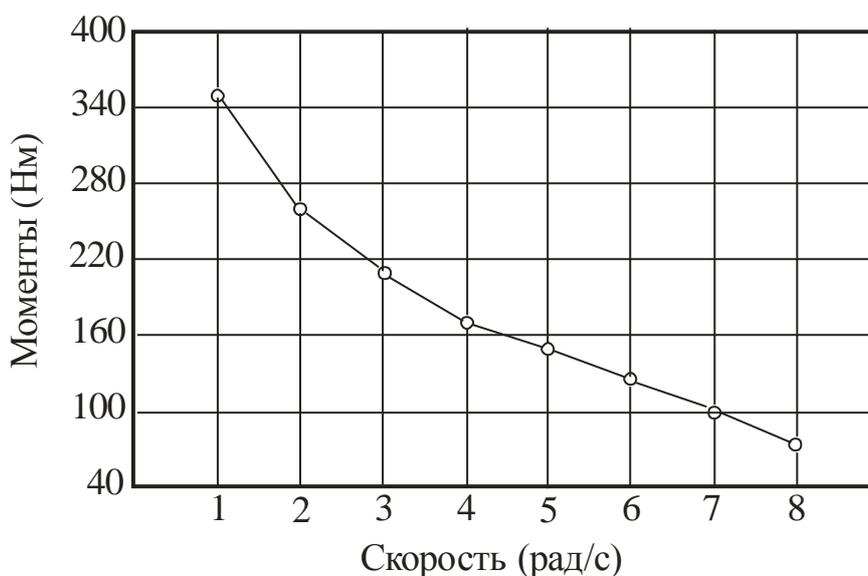


Рис. 3.6. Зависимость "сила – скорость" у гимнастов 18 – 25 лет (по данным О.И.Загrevского, 1999)

Принимая за 100% значение моментов мышечных сил сгибателей плеч, при угле между руками и туловищем равным 30° (230 Нм – статический режим), определим процентное соотношение использования силовых ресурсов гимнастов в зависимости от скорости изменения угла.

При скорости изменения угла до 2,5 рад/с, гимнасты используют 90 – 93% силовых возможностей статического режима работы мышц. Таким образом, при достижении этой скорости изменения суставного угла, испытывае-

мые практически развивали предельные величины мышечных сил и работа мышц в этом случае близка к статическому режиму.

При скорости, достигающей до 4,5 рад/с, мышцы сгибатели плеч развивают напряжение почти в два раза меньше величины зарегистрированной в статическом режиме и используют при этом около 60% своих силовых возможностей.

И наконец, при скорости изменения угла в плечевых суставах в пределах 6,0–7,0 рад/с, предельная величина мышечных сил в динамическом режиме составляет только 1/3 от статического, или гимнасты используют 37–31% силовых ресурсов.

Следовательно, отмечается обратная зависимость: чем больше скорость изменения угла в суставах, тем меньшую силу может развить спортсмен.

Отсюда следует:

1. Упражнения, направленные на развитие силовых качеств, в статическом режиме работы мышц не оказывают положительного воздействия на увеличение силового потенциала в динамическом режиме работы мышц. И наоборот: упражнения скоростно-силового характера не оказывают положительного воздействия на увеличение силового потенциала в статическом режиме работы мышц.

2. Подбор специально-подготовительных упражнений, направленных на повышение силового потенциала спортсмена, должен выполняться на основе принципа сопряженного воздействия: для соревновательных упражнений скоростно-силового характера и специально-подготовительные упражнения должны быть скоростно-силовыми. Для соревновательных упражнений статического характера и специально-подготовительные упражнения должны быть близкими к статическому режиму работы мышц.

3. По отношению к динамическому режиму работы мышц преодолевающего характера максимальную мышечную силу спортсмен проявляет в статическом режиме работы мышц. Именно поэтому гимнасту достаточно просто удержать на кольцах упор руки в стороны («крест Азаряна»), но очень сложно выполнить из этого положения подъем в упор («дожим»).

3.6. Факторы, определяющие величину проявления мышечной силы

Причинно-следственная зависимость, определяющая величину проявления мышечной силы человека, сводится, в основном, к действию следующих факторов: сила тяги мышц зависит от совокупности действия *механических, анатомических и физиологических условий* выполнения мышечной работы.

Механические условия

Основным механическим условием, определяющим тягу мышц, является нагрузка. Без нагрузки на мышцу не может быть ее силы тяги. *Нагрузка* растягивает мышцу при ее уступающей работе (опускание из вися на согнутых руках в вис на перекладине). Против нагрузки мышца выполняет преодолевающую работу (подтягивание: из вися на перекладине до вися на согнутых руках). В уступающем режиме работы, мышцы проявляют большую силу, чем в преодолевающем режиме работы мышц.

Нагрузка может быть представлена весом тела, а также силой инерции движущихся звеньев, которая зависит от ускорения. Следовательно, и при не очень большом отягощении, увеличивая ускорение можно увеличивать нагрузку, а значит и силу тяги мышц.

Движение звеньев биокинематической цепи, как результат приложения силы тяги мышцы, зависит, также, от следующих факторов:

1. Закрепления звеньев – приводит к разным движениям звеньев в суставе при различных условиях закрепления звеньев в паре.
2. Соотношения сил, вызывающих движение, и сил сопротивления.
3. Начальных условий движения – положение звеньев пары и их скорость (направление и величина – зависимость «сила – скорость») в момент приложения силы тяги мышц.

Анатомические условия

1. Строение мышцы.
2. Расположение мышцы в данный момент движения.

Строение мышцы в виде физиологического поперечника мышцы (площадь сечения через все волокна перпендикулярно к их продольным осям) определяет суммарную тягу всех волокон: чем больше физиологический поперечник мышцы, тем больше сила тяги мышцы. От расположения волокон зависит и величина их упругой деформации.

Расположение мышцы в каждый момент движения определяет угол ее тяги относительно костного рычага и величину растягивания, что влияет на величину момента силы тяги мышцы и, что проявляется, в частности, в уже рассмотренной выше зависимости «сила – суставной угол».

Физиологические условия

В основном можно свести к возбуждению и утомлению мышцы. Эти два фактора влияют на возможностях мышцы, повышая или снижая ее силу тяги.

С увеличением скорости сокращения мышцы при преодолевающей работе ее сила тяги уменьшается. При уступающей же работе увеличение скорости растягивания мышцы увеличивает ее силу тяги. Этот факт очень важен для оценки силы тяги мышц в быстрых движениях.

Так как в биокинематических цепях все звенья цепи, так или иначе, связаны, то в каждом конкретном случае лишь совокупность всех факторов определяет результат работы мышц в целом. Иначе говоря, результат силы тяги мышц – интегральный показатель действия всех факторов, определяющих величину проявления мышечной силы.

Позно-тонические рефлексy

Положение головы, определяемое по отношению ее расположения к туловищу, существенным образом влияет на величину мышечной активности передней или задней поверхности туловища и ног. При наклоне головы на грудь стимулируются к работе мышцы передней поверхности тела, при наклоне головы назад – мышцы задней поверхности тела.

Так, например, гимнаст при выполнении на кольцах упражнения «горизонтальный вис спереди» наклоняет голову на грудь, что стимулирует к работе мышцы передней поверхности тела и значительно облегчает выполнение

упражнения. При выполнении же горизонтального вися на кольцах большую нагрузку испытывают мышцы задней поверхности тела. Для облегчения выполнения упражнения гимнаст отклоняет голову назад, что приводит к стимуляции мышцы задней поверхности тела.

Или, к примеру, легкоатлет, во время спринтерского бега, старт и финиш выполняет с различным положением головы по отношению к туловищу. Так, во время стартового ускорения, голова спортсмена наклонена на грудь. Основная двигательная задача спортсмена в это время заключается в приобретении максимальной скорости, для чего проекция ОЦМ тела спортсмена по вертикали должна располагаться несколько спереди по отношению к опоре. Поэтому, для предупреждения преждевременного выпрямления тела, что приведет к падению скорости, легкоатлет наклоняет голову на грудь. Такое положение головы не стимулирует к работе мышцы разгибатели туловища и ног, и поэтому выпрямление тела будет происходить в соответствии с установкой целесообразного решения двигательной задачи. В то же время на финише спринтер откидывает голову назад. Основная двигательная задача в это время – поддержать на максимально возможном уровне финишную скорость бега. Наклон головы назад стимулирует к работе мышцы задней поверхности тела, в частности, мышцы разгибатели ног, что ведет к увеличению силы отталкивания и способствует поддержанию набранной скорости.

Следовательно, величина проявления мышечной силы определяется комплексом факторов, результат действия которых необходимо учитывать при совершенствовании техники соревновательных упражнений.

Контрольные вопросы

1. Какие структуры кинематических цепей выделяют в биомеханике?
2. Что определяет количество степеней свободы в движущихся биокинематических цепях?
3. Какие обозначения приняты в трехвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека?
4. На какие три фазы подразделяется график инерционности процесса мышечного напряжения и какими цифровыми данными характеризуется закономерность изменения каждой из фаз?

5. Какой механизм используется в опорных прыжках при отталкивании с гимнастического мостика для того, чтобы добиться совпадения момента времени окончания отталкивания и максимума мышечного напряжения?

6. В каких закономерностях проявляется зависимость «сила – суставной угол»?

7. В каких закономерностях проявляется зависимость «сила – скорость»?

8. В чем проявляется принцип сопряженного воздействия при обучении двигательным действиям?

9. От каких условий зависит величина проявления мышечной силы?

10. Каким образом необходимо учитывать механизм проявления познотонических рефлексов при выполнении упражнений?

4. БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1. Классификация биомеханических характеристик

Исследуя движения человека, измеряют *количественные* показатели:

- механического состояния и двигательной функции тела;
- пространства состояний биомеханической системы (движений).

Механическое состояние и двигательные функции тела человека описываются большим набором характеристик (размеры, пропорции, распределение масс сегментов и звеньев тела человека, подвижность в суставах, величина силы тяги мышц и др.).

Механическое состояние биомеханической системы в движении также описывается определенными характеристиками (пространственное положение, скорость, ускорение, координаты и траектория отдельных звеньев биомеханической системы и общего центра масс тела человека, кинетическая и потенциальная энергия и др.).

Биомеханические характеристики – это меры механического состояния и изменения биосистемы.

Для системного анализа (определения состава системы) движений биомеханические характеристики позволяют различать разные движения, отличить одно движение от другого.

Для системного синтеза (определение структуры движения) биомеханические характеристики дают возможность установить закономерность изменения движений под воздействием различных факторов. Иначе говоря, выяснить, например, как влияет последовательность и величина (амплитуда) сгибательно-разгибательных движений в суставах или их отсутствие на формирование траектории биомеханической системы? Или, каким образом изменится траектория биомеханической системы при увеличении ее динамических ресурсов, к примеру, на 10%, 20%, 30%, а программное управление кинематического уровня останется без изменений?

Когда биомеханические характеристики измеряют или вычисляют, то получают *количественные характеристики*, с помощью которых выполняют *количественный биомеханический анализ* исследуемых движений.

Когда характеристики описывают только словами (без измерения), то это – *качественные характеристики*. Педагогу во время проведения урока некогда и нечем измерять и регистрировать количественные характеристики и поэтому он обычно проводит *качественный биомеханический анализ* движений.

Для описания движения в пространстве и во времени используют *кинематические характеристики*. *Кинематические характеристики* описывают *внешнюю картину* движения, его *пространственную форму* (рисунок, узор) и *характер изменения во времени* (быстрее, чаще и т.п.). Кинематические характеристики включают три группы характеристик:

- *пространственные*;
- *временные*;
- *пространственно-временные*.

Кинематические характеристики, определяя геометрию движения, не учитывают движущиеся массы и действующие силы и поэтому не в состоянии дать ответ на вопрос о причинах возникновения и изменения движений. *Причины возникновения и изменения движений* раскрывает динамика с использованием *динамических характеристик*, включающих в себя три большие группы биомеханических характеристик:

- *силовые*;
- *инерционные*;
- *энергетические*.

Биомеханические характеристики двигательных действий, включающие в себя структурные компоненты кинематических и динамических характеристик, показаны на рисунке 4.1.

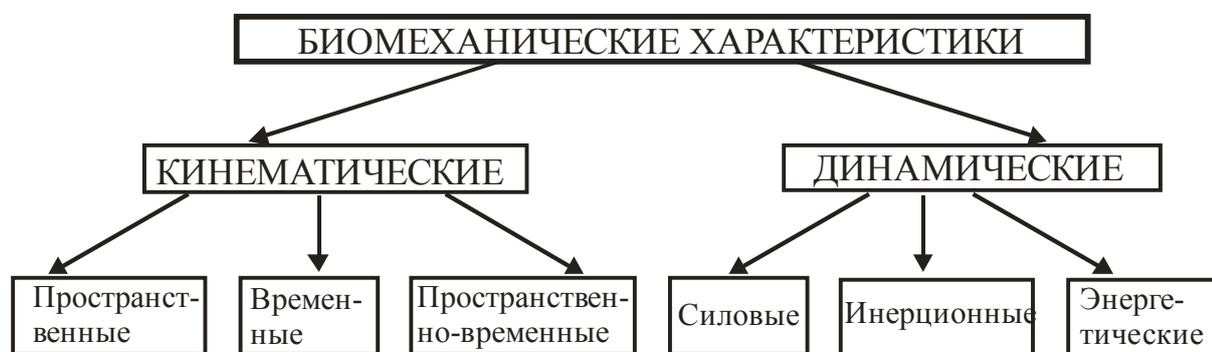


Рис. 4.1. Классификационная схема биомеханических характеристик

Резюмируя все вышесказанное, можно дать следующую обобщенную *классификацию биомеханических характеристик*:

1. Качественные характеристики.
2. Количественные характеристики.
3. Характеристики сегментов и звеньев тела человека.
4. Характеристики движений:
 - кинематические характеристики;
 - динамические характеристики.

4.2. Биомеханические характеристики сегментов тела человека

Для биомеханических расчетов динамических характеристик исследуемых упражнений необходимы данные о масс-инерционных характеристиках (МИХ) сегментов тела человека, т.к. соответствующие уравнения динамики включают в себя те или иные численные значения, характеризующие геометрию масс тела человека. В биомеханике под геометрией масс тела человека понимается массив показателей, характеризующий распределение массы, как всего тела, так и его отдельных сегментов. Такими показателями являются массы, положение центра масс сегментов, моменты инерции, длины сегментов.

Так, например, общий центр масс биомеханической системы является одной из масс-инерционных характеристик, наиболее широко используемых при исследовании техники соревновательных упражнений. Определение траектории движения ОЦМ тела спортсмена имеет большое значение при исследовании вопросов сохранения устойчивого равновесия в приземлении после выполнения соскоковых упражнений в гимнастике, оптимизации движений, построения эффективной программы места и позы спортсмена в динамических упражнениях и в ряде других случаях. В частности, по траектории движения ОЦМ определяют эффективность решения двигательных задач в упражнениях, связанных с вращением тела относительно закрепленной оси, так как увеличение или уменьшение скорости вращательного движения тела спортсмена определяется изменением радиуса вращения ОЦМ тела спортсмена.

Для определения положения ОЦМ биомеханической системы необходимо знать масс-инерционные характеристики сегментов тела человека и уметь

определять общий центр масс системы тел, моделирующих различную конфигурацию звеньев тела спортсмена в подводящих и соревновательных упражнениях.

Часто в учебно-методической и научной литературе можно встретить понятие о центре тяжести тела. Возникает вопрос: тождественны ли понятия «центр масс тела» и «центр тяжести тела»? Здесь следует сделать пояснение. В любом случае центр масс тела совпадает с координатами его центра тяжести, если тело находится в однородном поле сил тяготения. Действительно, обозначим символами P_1, P_2, P_3, P_4 силы, действующие на отдельные частицы тела, а их равнодействующую – символом \mathbf{P} (рис. 4.2). В этом случае вес тела равен модулю равнодействующей и определяется равенством

$$\mathbf{P} = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Если мысленно повернуть тело относительно любой оси пространственной системы координат, то силы P_i остаются приложенными в одних и тех же точках параллельными друг другу и сохраняют направление. Таким образом, равнодействующая \mathbf{P} сил P_i при любых положениях тела будет проходить через одну и ту же точку C , называемую центром тяжести тела.

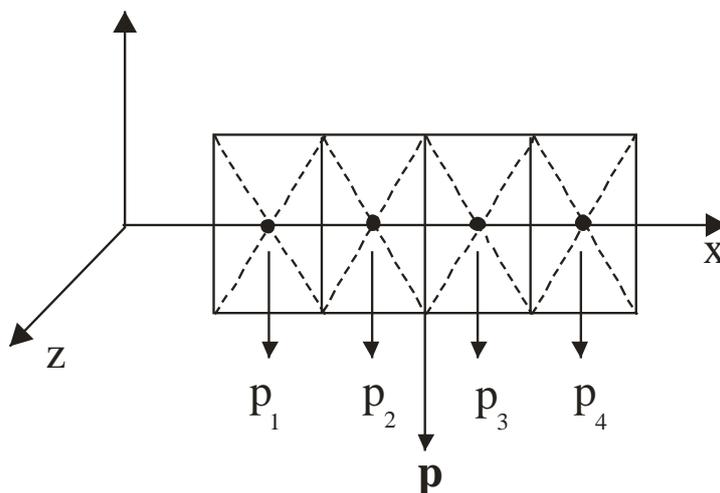


Рис. 4.2. Равнодействующая сил

Следовательно, центр тяжести твердого тела есть неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит связанная с этим телом линия действия равнодействующих всех сил тяжести частиц данного тела при любом его

положении в пространстве. Этой точкой также будет определяться и центр масс тела.

Таким образом, понятие центра тяжести имеет смысл только в том случае, если тело находится в однородном поле силы тяжести. Для любой же системы материальных тел, для которых равнодействующая всех внешних сил равна нулю, правомерно употребление понятия, центр масс. К примеру, в условиях невесомости имеет смысл говорить о центре масс тела, а не о центре тяжести. В условиях же действия поля силы тяжести эти два понятия не имеют принципиального различия, хотя понятие о центре масс тела в этом случае все же более корректно.

В *математической модели движения человека*, представленной в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка, в качестве постоянных коэффициентов при угловых (обобщенных) скоростях и ускорениях звеньев модели используют *динамические коэффициенты*. Численная величина динамических коэффициентов зависит от 4-х параметров сегментов тела человека:

- 1) *длина сегмента* (кинематическая характеристика – пространственная).
- 2) *координата центра масс сегмента* (кинематическая характеристика – пространственная).
- 3) *масса сегмента* (динамическая характеристика – инерционная).
- 4) *момент инерции сегмента* (динамическая характеристика – инерционная).

В различных формульных выражениях для вычисления кинематических или динамических характеристик упражнений эти четыре параметра, в той или иной мере, также всегда имеют место. Поэтому важно знать их количественные показатели и уметь численно определить.

В соответствии с первым законом Ньютона *всякое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока внешние приложенные к телу силы не заставят его изменить это состояние*. Иначе говоря, тело сохраняет свою скорость, а также под действием внешних сил изменяет ее. В этом проявляется свойство инертности физических тел: противодействовать изменению скорости. Чем больше инертность, тем труднее тело сдвинуть с места или затормозить его.

Масса – это мера инертности тела при поступательном движении. Масса (m) измеряется отношением приложенной силы (F) к вызываемому силой ускорению (a)

$$m = \frac{F}{a} . \quad (4.1)$$

Измерение массы по формуле (4.1) основано на втором законе Ньютона: *изменение движения пропорционально извне действующей силе и происходит по тому направлению, по которому эта сила приложена.*

В процессе выполнения различных упражнений масса спортсмена не изменяется. При взвешивании определяется вес (P) спортсмена в килограммах (кг). В этом случае из формулы (4.2) следует, что массу (m) спортсмена можно определить как

$$m = \frac{P}{g} . \quad (4.2)$$

Здесь: g – ускорение свободного падения тела, равное $9,806 \text{ м/с}^2$. Размерность массы – $\text{кг с}^2/\text{м}$.

Центр масс сегмента. Биомеханический анализ техники соревновательных упражнений подразумевает учет не только величины массы, но и ее распределение в сегменте тела – *центр масс сегмента*, точки – совпадающей с точкой *центра тяжести* этого же сегмента (в условиях действия силы тяжести).

Момент инерции – это мера инертности тела во вращательном движении. Момент инерции (J) прямо пропорционален массе тела (m) и квадрату расстояния (r) от центра масс тела до оси вращения

$$J = mr^2 . \quad (4.3)$$

В основном, в биомеханических исследованиях, достаточно знать параметры следующих сегментов тела человека: кисть, предплечье, плечо, туловище, голова, бедро, голень, стопа.

Длина сегмента, как известно из курса анатомии, определяется расстоянием от центра суставов, ограничивающих данный сегмент, и измеряется антропометрическим циркулем. Единица размерности длины – метр.

Остальные три параметра определяются экспериментальным или аналитическим методами.

Аналитические методы определения геометрии масс тела человека.

Определение координаты центра масс однородного стержня не представляет затруднений: расположение искомой точки определяется половиной длины стержня. Сегменты тела человека не являются стержнями, и координата их центра масс приближена или удалена от суставов, его ограничивающих. Поэтому, численно координаты центра масс сегментов тела человека, можно определить или по средне-статистическим данным, или по уравнениям множественной регрессии.

Средне-статистические данные, являются одним из тех показателей, которые позволяют достаточно просто определить координаты центра масс тела человека: вес сегмента или расположение его центра масс составляет определенный процент от веса тела человека или от длины его сегмента. Например, вес кисти составляет 1% от веса тела человека, или, расстояние от плечевого сустава до центра масс предплечья равно 43% от длины предплечья. Недостаток данной методики – недостаточная точность получаемых результатов: погрешность может достигать 50% – 70%.

Уравнения множественной регрессии позволяют определить биомеханические характеристики сегментов тела человека с учетом веса и роста испытуемых. Коэффициенты в уравнениях множественной регрессии определены статистическими методами на основе радиоизотопной методики определения геометрии масс тела человека. Погрешность использования алгоритмов уравнений множественной регрессии не превышает 3%.

Экспериментальное определение

Так как тело человека представляет собой биомеханическую систему, состоящую из связанных сегментов, то прижизненное экспериментальное определение их масс-инерционных характеристик связано со значительными трудностями. Первые экспериментальные данные о геометрии масс тела человека были получены зарубежными исследователями (Harless, 1860; Braune, Fisher, 1889 и др.). Сегменты тела замороженных трупов рассекались по осям вращения суставов, затем взвешивались, и экспериментально определялись координаты центра масс сегментов и их моменты инерции. Полученные данные до недавне-

го времени являлись практически единственными, на основе которых выполнялись расчеты по динамике двигательных действий человека.

В настоящее время потребность в повышенной точности выполнения биомеханических расчетов привела к необходимости получения более точной информации о геометрии масс тела человека. И одним из наиболее корректных методов прижизненного определения масс-инерционных характеристик тела человека, позволяющим получить искомые характеристики с достаточной точностью, является *радиоизотопный метод*. В лаборатории ГЦОЛИФК кафедры биомеханики (Зациорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н., 1981) проблема практической реализации идеи радиоизотопного метода была успешно решена. В серии проведенных экспериментов были получены уточненные данные о масс-инерционных характеристиках сегментов тела человека.

В таблице 4.1 приведены сведения об относительных весах ($m\%$) и координатах центра масс сегментов (ЦМ%) на их продольных осях. В результате экспериментальных исследований были установлены относительные весовые коэффициенты ($m\%$), определяющие с точностью не менее 3,7% массу сегментов тела в процентах к массе тела в целом. Точность – достаточная для биомеханических исследований и педагогических рекомендаций.

Т а б л и ц а 4.1

Относительные веса и координаты центра масс сегментов

i	Сегмент	$m\%$	ЦМ%
1	Стопа	1,371	44,1
2	Бедро	4,330	40,5
3	Бедро	14,165	45,5
4	Кисть	0,614	37,0
5	Предплечье	1,625	42,7
6	Плечо	2,707	45,0
7	Голова	6,940	50,0
8	Туловище	43,457	44,5

Зная массу тела и используя относительные весовые коэффициенты, можно определить абсолютную массу сегмента тела спортсмена по формуле

$$m_i = (m \cdot m\%_i) / 100,$$

где m – масса тела спортсмена; m_i – масса i -го сегмента.

Аналогичным образом определяются и координаты центра масс сегментов на их продольной оси. Отсчет расстояния при этом выполняется от антропометрической точки сегмента (рис. 4.3).

Простота и доступность вычислений геометрии масс тела человека с помощью весовых и относительных коэффициентов создает предпосылки для широкого внедрения этого метода в биомеханические расчеты. Однако, для более полного учета индивидуальных особенностей строения опорно-двигательного аппарата тела человека, авторами разработанной радиоизотопной методики определения геометрии масс тела человека, предложено использовать уравнения множественной регрессии.

Дело в том, что взаимосвязь между весом сегмента и весом тела, между относительным расстоянием от антропометрической точки сегмента до его центра масс и длиной сегмента не может быть выражена уравнением вида

$$Y = AX,$$

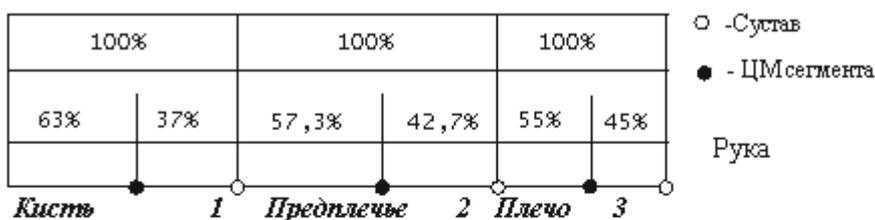
Где Y – вес сегмента или положение его центра масс; A – весовой или относительный коэффициенты; X – вес или длина сегментов тела.

Результаты определения геометрии масс тела человека с помощью радиоизотопной методики свидетельствуют о том, что даже в простейшем случае искомая связь имеет вид $Y = A_0 + A_1X_1$. Исследования, выполненные авторами, позволили им вывести уравнения множественной регрессии для оценки массы сегментов тела и положения их центров масс, учитывающие антропометрические особенности испытуемых. В табл. 4.2 приведены коэффициенты уравнений множественной регрессии для вычисления массы сегментов тела и положения центра масс сегментов по двум аргументам: по массе и длине тела.

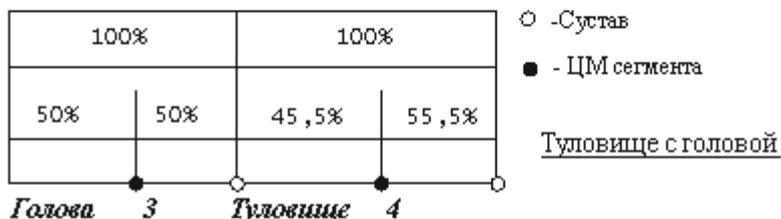
Положение центра масс и масса сегмента определяются по формуле

$$Y = A_0 + A_1X_1 + A_2X_2,$$

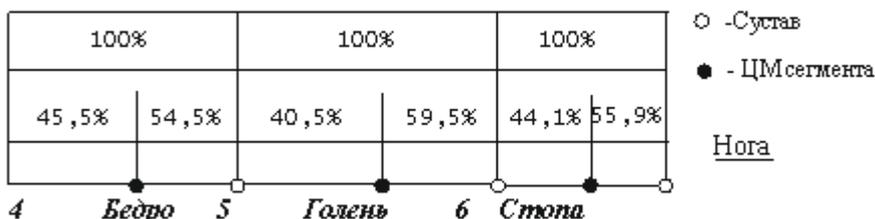
где X_1 – масса тела; X_2 – длина тела; A_0, A_1, A_2 – коэффициенты уравнений множественной регрессии.



1 - лучезапястный сустав. Антропометрическая точка для кисти - шиловидная;
 2 - локтевой сустав. Антропометрическая точка для предплечья - плечелучевая;
 3 - плечевой сустав. Антропометрическая точка для плеча - акромиальная.



3 - плечевой сустав. Антропометрическая точка для головы - остистый отросток 7-го шейного позвонка;
 4 - тазобедренный сустав.



4 - тазобедренный сустав. Антропометрическая точка для бедра - переднепозвздошная;
 5 - коленный сустав. Антропометрическая точка для голени - коленный сустав;
 6 - голеностопный сустав. Антропометрическая точка для стопы - пяточная.

Рис. 4.3. Антропометрические точки сегментов тела человека

Таблица 4.2

**Коэффициенты уравнений множественной регрессии
(по данным В.М. Зацiorsкого и др., 1981)**

Сегмент	A_0	A_1	A_2
Масса сегмента, кг			
Стопа	-0,829	0,0077	0,0073
Голень	-1,592	0,0362	0,0121
Бедро	-2,649	0,1463	0,0137
Кисть	-0,1165	0,0036	0,00175
Предплечье	0,3185	0,01445	-0,00114
Плечо	0,25	0,03012	-0,0027
Голова	1,296	0,0171	0,0143
Верхняя часть туловища	8,2144	0,1862	-0,0584

Средняя часть туловища	7,181	0,2234	-0,0663
Нижняя часть туловища	-7,498	0,0976	0,04896
Положение центра масс на продольной оси сегмента, см			
Стопа	3,767	0,065	0,033
Голень	-6,05	-0,039	0,142
Бедро	-2,42	0,038	0,135
Кисть	4,11	0,026	0,033
Предплечье	0,192	-0,028	0,093
Плечо	1,67	0,03	0,054
Голова	8,357	-0,0025	0,023
Верхняя часть туловища	3,32	0,0076	0,047
Средняя часть туловища	1,398	0,0058	0,045
Нижняя часть туловища	1,182	0,0018	0,0434

4.2.1. Центр масс звеньев тела

Экспериментально-аналитические методы определения ОЦМ системы тел разработаны на основе теоремы Вариньона о моменте равнодействующей системы сил. В практике биомеханических исследований нередко возникают затруднения в определении моментов внешних сил, действующих на тело спортсмена при выполнении соревновательных упражнений. Поэтому нелишне вспомнить, как трактуется понятие момента силы в теоретической механике.

Допустим, на тело в точке A действует произвольная сила F , не параллельная оси вращения Oz и не пересекающая ее (рис. 4.4). Проведем плоскость Q , перпендикулярную оси Oz и проходящую через начало A вектора силы F . Силу F можно разложить на две составляющие: F_1 , расположенную в плоскости Q , и F_2 , параллельную оси Oz .

Так как сила F_2 параллельна оси Oz , то она не создает вращательного момента относительно этой оси. Составляющая F_1 , действующая в плоскости Q , создает относительно оси Oz момент силы Mz , равный произведению силы (F_1) на ее плечо (h)

$$Mz = F_1 h. \quad (4.4)$$

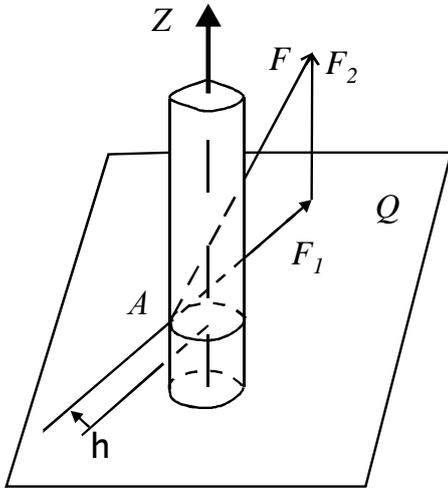


Рис. 4.4. Сила, действующие на тело в точке А

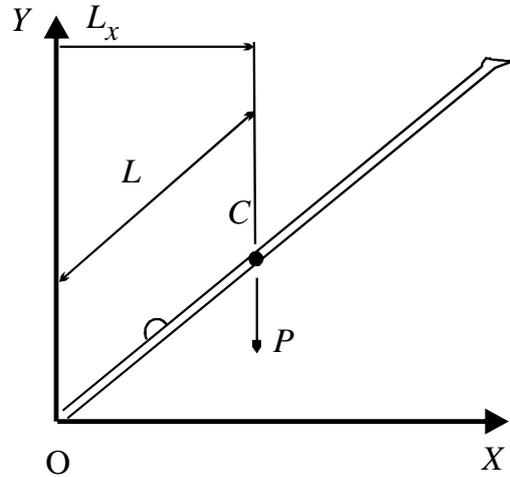


Рис. 4.5. Момент силы тяжести в большом обороте назад на перекладине

Момент силы тяжести относительно оси, расположенной перпендикулярно плоскости движения, в соответствии с уравнением (4.4), определяется без затруднений. Допустим, спортсмен выполняет большой оборот назад на перекладине (рис. 4.5).

Допустим, также, что нам известно расположение его центра масс (C), вес (P) и расстояние от ОЦМ (L) до оси вращения. В этом случае действующий на тело спортсмена момент силы тяжести (M) определяется произведением его веса и проекции L на ось Ox :

$$M = P \cdot L_x.$$

Запишем теорему Вариньона в аналитической форме. Согласно теореме Вариньона, если данная система сил не эквивалентна нулю и имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси, или

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (4.5)$$

Здесь M – момент равнодействующей силы относительно некоторой оси; m_i – момент i -й силы относительно той же оси; i – порядковый номер рассматриваемой силы; n – количество действующих сил.

Рассмотрим использование теоремы Вариньона в случае определения координат общего центра масс системы тел в условиях силы тяжести на следующем примере (рис. 4.6).

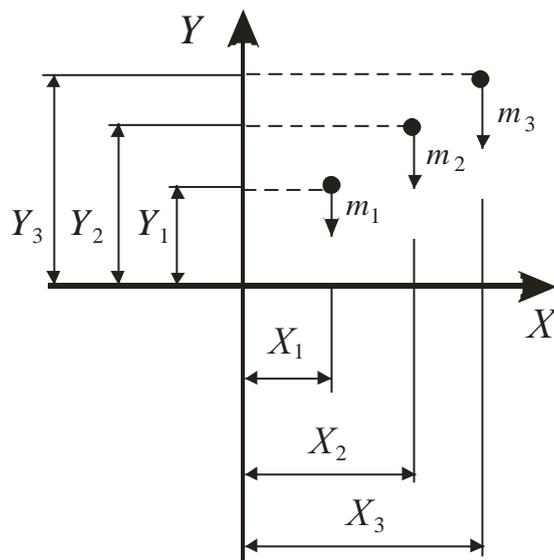


Рис. 4.6. Система тел из трех шаров

Дана система тел из трех шаров. Масса каждого шара равна соответственно m_1, m_2, m_3 (массой соединительных проволок можно пренебречь). В соответствии с формулами (4.4), (4.5) имеем

$$M \cdot X_c = m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3,$$

$$M \cdot Y_c = m_1 Y_1 + m_2 Y_2 + m_3 Y_3, \quad (4.6)$$

где M – масса системы; X_c, Y_c – координаты общего центра масс системы тел по осям Ox, Oy .

Отсюда X_c, Y_c определяются равенствами (4.7)

$$X_c = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3}{M}, \quad Y_c = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2 + m_3 Y_3}{M}. \quad (4.7)$$

В общем случае формулы для определения координат ОЦТ N -звенной системы тел имеют вид

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i X_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i Y_i}{\sum_{i=1}^n P_i}. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.8) позволяют определить координаты центра масс звеньев тела спортсмена по известным значениям масс, длин сегментов тела и положению их центра масс. Так как для рассматриваемой модели опорно-двигательного аппарата тела человека положение центра масс сегмента принято на его продольной оси, то в этом случае для определения положения центра масс звена достаточно воспользоваться одной из формул в (4.8). Действительно, совместим, например, тазобедренный сустав с началом декартовой системы координат, а продольную ось ноги – с осью Ox . Тогда координата центра масс ноги по оси Oy равна нулю, так как центры масс бедра, голени и стопы расположены на оси Ox . Для определения координаты ЦМ ноги по оси Ox необходимо знать массу бедра, голени, стопы, а также их центры масс (X_1, X_2, X_3) в декартовой системе координат.

Масса бедра, голени, стопы определится по табличным данным (табл. 3). Аналогичным образом, с учетом кинематической схемы ноги (рис. 4.7), определяются и центры масс бедра, голени и стопы в декартовой системе координат на оси Ox .

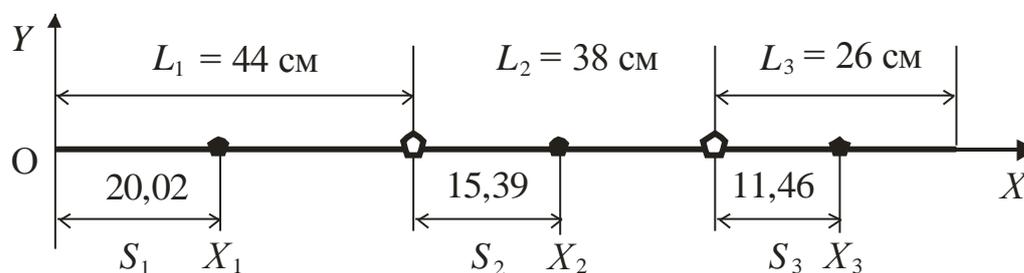


Рис. 4.7. Кинематическая схема ноги

Далее, по формулам координат центра масс системы тел (4.8) найдем координату центра масс ноги на оси Ox .

Следовательно, прежде чем определить координату (X_c) центра масс звена, необходимо предварительно, вычислить массы составляющих его сегментов и найти их центры масс в декартовой системе координат. Здесь следует учесть, что для многозвенной модели звеньями тела могут являться и сегменты. Например, при выполнении сгибательных движений ноги в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах, звеньями являются сегменты: стопа, голень, бедро.

Отдельно следует рассмотреть и вопрос об определении координат ЦМ туловища, если в качестве исходных данных используются не процентные показатели, а значения масс и координат верхней, средней, нижней частей туловища, вычисленные по уравнениям множественной регрессии. Дело в том, что для вычисления ЦМ туловища предварительно необходимо знать длину каждой из частей туловища, что можно получить или прямым измерением, или вычислить, используя данные авторов радиоизотопной методики определения масс-инерционных характеристик звеньев тела человека.

При прямом измерении длины верхней, средней, нижней частей туловища, в качестве антропометрических точек, указывающих границы сегментов, используют следующие точки:

1. *Верхний отдел туловища.*

Проксимальная точка – остистый отросток седьмого шейного позвонка.

Дистальная точка – нижне-грудинная.

2. *Средний отдел туловища.*

Проксимальная точка – нижне-грудинная.

Дистальная точка – пупочная.

3. *Нижний отдел туловища.*

Проксимальная точка – пупочная.

Дистальная точка – передне-подвздошная.

Для среднего отдела туловища измерения выполняют в положении лежа.

«Биомеханические» длины сегментов тела, в том числе и различных отделов туловища, можно определить из уравнения множественной регрессии

$$Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3,$$

где: Y – длина сегмента; X_1 – длина ноги; X_2 – длина тела (рост); X_3 – длина руки;

B_i – коэффициенты уравнений множественной регрессии.

Непосредственно коэффициенты B_i можно определить по табличным данным (табл. 4.3).

Т а б л и ц а 4.3

Определение коэффициентов B_i (по данным В.М.Зациорского и др., 1981)

Сегмент	B_0	B_1	B_2	B_3
Стопа	0,516	0,0086	0,109	0,069
Голень	1,05	0,282	0,049	0,033
Бедро	5,34	0,330	0,093	-0,012
Кисть	1,28	-0,072	0,02	0,256
Предплечье	7,19	0,134	0,0016	0,062
Плечо	1,79	0,309	-0,12	0,185
Голова	15,90	-0,046	0,094	-0,047
Верхняя часть туловища	3,78	-0,133	0,11	0,17
Средняя часть туловища	3,16	-0,219	0,241	-0,042
Нижняя часть туловища	-12,90	-0,16	0,19	0,26

Сейчас вполне правомерно поставить вопрос и об определении координат ОЦМ тела спортсмена в процессе выполнения упражнений.

4.2.2. Общий центр масс биомеханической системы

Поставленная задача может быть решена одним из следующих способов.

Введем в рассмотрение обобщенные координаты Q_i , соответствующие углу наклона i -го звена к оси Ox . В этом случае для трехзвенной модели координаты центра масс звеньев системы (X_i, Y_i) определяются равенствами

$$\begin{aligned}
 X_1 &= S_1 \cos Q_1; & X_2 &= L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2; \\
 Y_1 &= S_1 \sin Q_1; & Y_2 &= L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2; \\
 X_3 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3; \\
 Y_3 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Введем правые части уравнений (4.9) в уравнения координат ОЦМ трехзвенной системы тел (4.7). Получим

$$X_C = \frac{m_1(S_1 \cos Q_1) + m_2(L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2) + m_3(L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3)}{m};$$

$$Y_C = \frac{m_1(S_1 \sin Q_1) + m_2(L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2) + m_3(L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3)}{m}. \quad (4.10)$$

Полученные уравнения однозначно определяют координаты ОЦМ трехзвенной биомеханической модели через масс-инерционные характеристики звеньев тела и обобщенные координаты.

Учитывая, что центр масс i -го звена N -звенной модели выражается посредством уравнений (4.8), можно записать уравнения координат ОЦМ для N -звенной биомеханической системы в следующем виде:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i S_i \cos Q_i + \sum_{k=2}^n m_k \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j}{\sum_{i=1}^n m_i};$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i S_i \sin Q_i + \sum_{k=2}^n m_k \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.10), (4.11) можно преобразовать, сгруппировав члены при тригонометрических функциях. Для равенств (4.10) имеем

$$X_C = \frac{(m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \cos Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \cos Q_2 + m_3 S_3 \cos Q_3}{m};$$

$$Y_C = \frac{(m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \sin Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \sin Q_2 + m_3 S_3 \sin Q_3}{m}. \quad (4.12)$$

где m – масса всей системы. Обозначим алгебраические выражения при тригонометрических функциях символом A с индексом, номер которого соответствует порядковому номеру обобщенной координаты

$$A_1 = (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) / m;$$

$$A_2 = (m_2 S_2 + m_3 L_2) / m;$$

$$A_3 = (m_3 S_3) / m. \quad (4.13)$$

Используя полученные выражения, будем иметь компактную запись уравнений (4.12):

$$Xc = A_1 \cos Q_1 + A_2 \cos Q_2 + A_3 \cos Q_3;$$

$$Yc = A_1 \sin Q_1 + A_2 \sin Q_2 + A_3 \sin Q_3. \quad (4.14)$$

Нетрудно заметить то обстоятельство, что коэффициенты A_i для одной и той же биомеханической системы постоянны. Поэтому, для определения координат ОЦМ тела спортсмена при произвольных анатомически допустимых углах между звеньями тела достаточно один раз вычислить коэффициенты A_i и оперировать ими на всей траектории системы. Это весьма существенно повышает скорость вычислительных операций по сравнению с алгоритмом (4.11) и требует меньшего количества исходной биомеханической информации.

Коэффициенты A_i , определяющие координаты ОЦМ N -звенной биомеханической системы, на основании уравнений (4.13) находятся из следующего выражения:

$$A_i = \frac{m_i S_i + L_i \sum_{j=i+1}^N m_j}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (4.15)$$

а формулы координат ОЦМ системы примут вид

$$Xc = \sum_{i=1}^N A_i \cos Q_i, \quad Yc = \sum_{i=1}^N A_i \sin Q_i. \quad (4.16)$$

Численное определение коэффициентов A_i можно выполнить лишь по известным значениям m_i, S_i, L_i .

Коэффициенты A_i можно определить экспериментально-аналитическим путем. Методика экспериментально-аналитического определения коэффициентов A_i была разработана Ю.А.Ипполитовым еще в 1969 г., однако, к сожалению, не нашла широкого распространения. Сущность рассматриваемого метода заключается в следующем.

На две трехгранные призмы, одна из которых расположена на медицинских весах, а вторая – на полу, укладывается доска в горизонтальном положении. Измеряется давление доски на весы (R_1). Затем испытуемый принимает положение лежа на спине руки вверх (на одной прямой с туловищем) таким образом, чтобы проекция полусогнутых пальцев кистей рук совпадала с высотой трехгранной призмы, установленной на полу. В этом положении $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0^0$ и координата центра масс спортсмена по оси Ox находится по формуле

$$X_1 = A_1 + A_2 + A_3 = [(R_2 - R_1)S] / P,$$

Где R_2 – давление тела и доски; R_1 – давление доски; S – расстояние между вершинами призм; P – вес испытуемого; Q_1 – обобщенная координата первого звена (руки); Q_2 – обоб-

щенная координата второго звена (туловище); O_3 – обобщенная координата третьего звена (ноги).

Измеряя давление тела и доски (R_3) в положении лежа руки вверх, ноги вперед, т.е. при $Q_1 = Q_2 = 0^0$, $Q_3 = 90^0$ определяется координата ОЦМ тела спортсмена по оси абсцисс из выражения

$$X_2 = A_1 + A_2 = [(R_3 - R_1) S] / P.$$

Для определения ординаты ОЦМ испытуемый принимает положение лежа руки вперед, т.е. когда $Q_1 = 90^0$, $Q_2 = Q_3 = 0^0$, тогда

$$Y = A_2 + A_3 = [(R_4 - R_1) S] / P - L_1,$$

где

L_1 – длина рук;

R_4 – давление тела и доски.

Решая полученные уравнения, находим коэффициенты A_i :

$$A_1 = X_1 - Y, \quad A_2 = X_2 - A_1, \quad A_3 = X_1 - X_2.$$

При программной реализации расчета коэффициентов A_i на ЭВМ достаточно ввести в память компьютера семь значений экспериментальных данных (для трехзвенной модели): P , S , L_1 , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 .

Таким образом, зная обобщенные координаты и коэффициенты A_i , по уравнениям (4.16) определяются координаты ОЦМ тела спортсмена на всей траектории выполняемого упражнения. Одновременно с этим вычисляется и радиус вращения ОЦМ (R) в соответствии с уравнением (4.17)

$$R = \sqrt{Xc^2 + Yc^2}. \quad (4.17)$$

Ценность экспериментально-аналитического метода определения ОЦМ тела человека заключается в том, что он позволяет учесть индивидуальные антропометрические особенности испытуемых.

4.2.3. Момент инерции звеньев тела и биомеханической системы

Одним из фундаментальных понятий в теории вращения тел является момент инерции, характеризующий инертность тела. Как известно из курса теоретической механики, инертностью тела называется его свойство сопротивляться

изменению скорости. В поступательных движениях инертность тела определяется его массой: чем больше масса, тем большая сила требуется для выведения его из состояния покоя и тем труднее его затормозить. Во вращательных движениях инертность тела определяется его моментом инерции. Следовательно, момент инерции во вращательных движениях является аналогом массы в поступательных движениях.

Момент инерции сегментов тела человека дает представление о распределении массы сегмента относительно заданной оси и численно равен сумме произведений масс всех материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения

$$J_o = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (4.18)$$

где J_o – момент инерции тела относительно заданной оси Oz ; m_i – масса i -й материальной точки; r_i – расстояние от i -й материальной точки до оси вращения.

Геометрическое представление выражения (57) в определенной степени иллюстрируется рисунком 4.8.

Если разбить стержень на шесть частей (рис. 4.8), то его момент инерции относительно оси Oz , перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через начало декартовой системы координат $Oxyz$, в соответствии с (4.18) равен

$$J_o = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 + m_6 r_6^2.$$

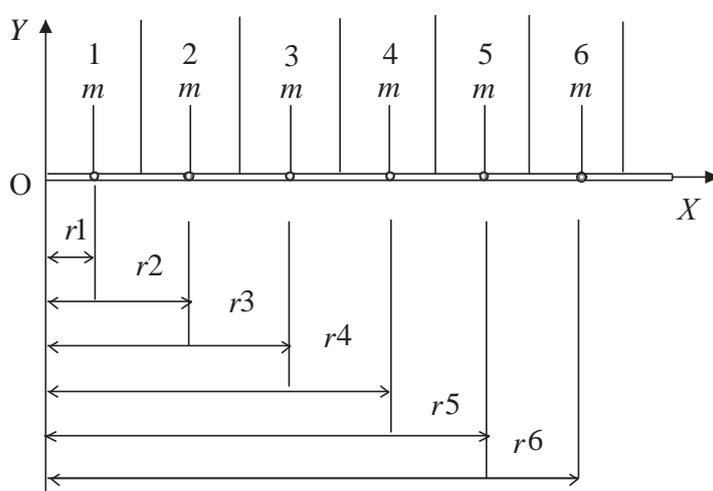


Рис. 4.8. Момент инерции стержня

Момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела, называется центральным. Например, центральный момент инерции стержня определяется из выражения

$$J_c = \frac{mL^2}{12}. \quad (4.19)$$

Здесь J_c – центральный момент инерции; m – масса стержня; L – длина стержня.

Однако сегменты тела человека можно лишь с большим приближением аппроксимировать стержнями, и определение центрального момента инерции сегментов тела человека по формулам (4.18), (4.19) ведет к значительным погрешностям. Более точным является метод аппроксимации звеньев тела и сегментов различными геометрическими фигурами. Представляя части тела человека в виде тел геометрически правильной формы с равномерно распределенной массой, вычисляют по соответствующим формулам их масс-инерционные характеристики. К примеру, аппроксимируя звенья тела и сегменты усеченными конусами, а в ряде случаев принимая их за параболоиды вращения, определяют момент инерции сегментов тела человека по табличным данным М.Ф. Фаворина (1977), которые позволяют, зная отношение радиусов конуса и его высоту, выразить искомые величины посредством введения соответствующих коэффициентов в расчетные формулы.

В настоящее время наиболее точным из существующих методов определения геометрии масс тела человека является радиоизотопный: погрешность используемого метода не превышает 3% (Зациорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н., 1981). В результате выполненных исследований авторами были определены коэффициенты (B_i) уравнений множественной регрессии вида

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2, \quad (4.20)$$

позволяющие вычислять центральные моменты инерции сегментов тела по весу (X_1) и длине (X_2) тела. Коэффициенты B_i , используемые в уравнениях множественной регрессии для вычисления центрального момента инерции сегментов тела человека, приведены в табл. 4.4.

Коэффициенты B_i , для вычисления центрального момента инерции сегментов тела (по данным В.М. Зацюрского и др., 1981)

i	Сегмент	B_0	B_1	B_2
1	Стопа	-97,09	0,414	0,616
2	Голень	-1152,00	4,594	6,815
3	Бедро	-3690,00	32,020	19,240
4	Кисть	-13,68	0,088	0,092
5	Предплечье	-67,90	0,855	0,376
6	Плечо	-232,00	1,525	1,343
7	Голова	-112,00	1,430	1,730
8	Верхняя часть туловища	367,00	18,300	-5,730
9	Средняя часть туловища	263,00	26,700	-8,000
10	Нижняя часть туловища	-934,00	11,800	3,440

Используя табличные данные коэффициентов уравнений множественной регрессии, можно вычислить центральный момент инерции сегментов тела человека относительно его фронтальной оси, что соответствует положению рассматриваемой модели тела спортсмена при выполнении, к примеру, оборотных упражнений на перекладине.

Отдельные звенья модели, состоящие из сегментов, также имеют центральный момент инерции, определяемый относительно оси, проходящей через центр масс звена. Правомерно возникает вопрос о способе его вычисления. С этой целью можно воспользоваться одним из положений теоретической механики: если известна величина момента инерции тела относительно какой-либо оси, то можно определить момент инерции данного тела и относительно любой другой оси, параллельной заданной и расположенной на произвольном расстоянии от нее. В математической форме данная зависимость выражается в виде соотношения

$$J_o = J_c + mr^2, \quad (4.21)$$

где J_o – момент инерции тела относительно заданной оси; J_c – центральный момент инерции; m – масса тела; r – расстояние от заданной оси до центра масс тела.

Рассмотрим технологию определения центрального момента для звеньев тела, состоящих из отдельных сегментов, например, для ноги, включающей в себя три сегмента: бедро, голень, стопы. Для иллюстрации воспользуемся рисунком 4.9, на котором показана кинематическая схема ноги.

Поместим ось тазобедренного сустава в начало системы координат и обозначим кружками суставы с соответствующими значениями координат по осям Ox , Oy : X_1, Y_1 – координаты тазобедренного сустава; X_2, Y_2 – координаты коленного сустава; X_3, Y_3 – координаты голеностопного сустава.

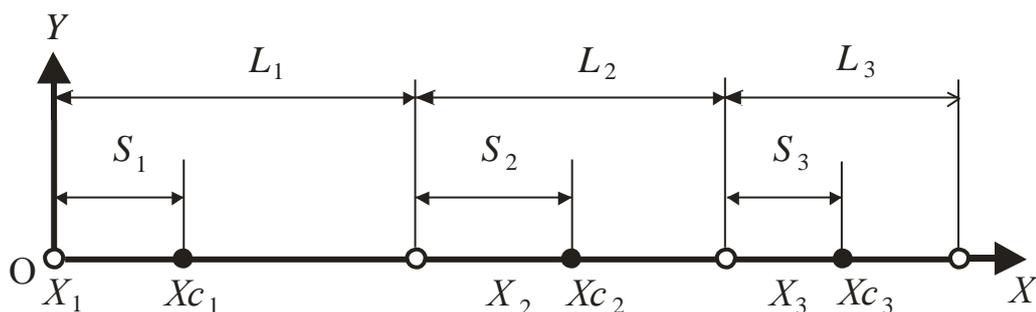


Рис. 4.9. Кинематическая схема ноги

Координатами центра масс сегментов тела будут соответственно:

1. X_{c1}, Y_{c1} – координаты центра масс бедра;
2. X_{c2}, Y_{c2} – координаты центра масс голени;
3. X_{c3}, Y_{c3} – координаты центра масс стопы.

Положим, что координаты как центра масс сегментов так и суставов по оси Oy равны нулю. Воспользуемся данными выполненных расчетов и припишем для масс сегментов, их длин и положений центра масс следующие значения:

бедро – $m_1 = 9,921$;	$L_1 = 44$;	$S_1 = 23,19$;
голень – $m_2 = 2,999$;	$L_2 = 38$;	$S_2 = 15,36$;
стопа – $m_3 = 0,951$;	$L_3 = 26$,	$S_3 = 13,927$.

Согласно рис. 4.9 координаты центра масс бедра, голени, стопы соответственно равны

$$X_{c1} = 23,19; \quad X_{c2} = 59,36; \quad X_{c3} = 91,927.$$

Введем обозначения для центральных моментов инерции сегментов ноги относительно оси Oz , перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей че-

рез центры масс сегментов: J_1 – центральный момент инерции бедра; J_2 – центральный момент инерции голени; J_3 – центральный момент инерции стопы.

Численные значения J_i соответственно равны:

$$J_1 = 1822,2; \quad J_2 = 328,13; \quad J_3 = 40,02.$$

На основании уравнений (4.18), (4.21) получим величину момента инерции ноги (J_o) относительно оси Oz , проходящей через тазобедренный сустав, перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 4.9)

$$J_o = J_1 + m_1 (Xc_1)^2 + J_2 + m_2 (Xc_2)^2 + J_3 + m_3 (Xc_3)^2. \quad (4.22)$$

В то же время

$$J_o = J_c + m (Xc)^2,$$

где J_c – центральный момент инерции ноги; m – масса ноги; Xc – расстояние от центра масс ноги до оси Oz .

Для определения центрального момента инерции биомеханической системы (J_c) воспользуемся уравнением Штейнера и приведем его к виду

$$J_c = J_o - mr^2, \quad (4.23)$$

где m – масса биомеханической системы; r – расстояние от ОЦМ системы до оси вращения, проходящей через точку опоры.

Учитывая, что $r = Xc$ и принимая во внимание уравнение (4.22) для рассматриваемой трехзвенной модели имеем

$$J_c = J_1 + J_2 + J_3 + m_1 (Xc_1)^2 + m_2 (Xc_2)^2 + m_3 (Xc_3)^2 - m (Xc)^2, \quad (4.24)$$

или в численном значении при $m = 13,871$ и $Xc = 35,722818$ получим, что $J_c = 8428,3712$. Для модели звена, состоящей из N сегментов, выражение (4.24) имеет вид

$$J_c = \sum_{i=1}^N J_i + \sum_{i=1}^N m_i Xc_i^2 - m Xc^2.$$

Как видно из уравнений (4.22), величина момента инерции тела определяется его массой и квадратом расстояния от центра масс тела до оси вращения. В

процессе выполнения упражнений масса тела спортсмена остается постоянной, а расстояние от центра масс звеньев тела до оси вращения, проходящей через точку опоры, меняется. Действительно, тело человека представляет собой биомеханическую систему переменной конфигурации, поэтому в динамических упражнениях взаимное расположение звеньев тела носит переменный характер, а следовательно, изменяется и расстояние от центров масс звеньев тела до точки опоры, что влечет за собой и изменение величины момента инерции как относительно оси, проходящей через ОЦМ тела спортсмена, так и относительно оси, проходящей через точку опоры.

Рассмотрим вопрос об определении момента инерции трехзвенной биомеханической системы относительно оси, проходящей через точку опоры при произвольных, анатомически допустимых углах, между звеньями тела (рис. 4.10).

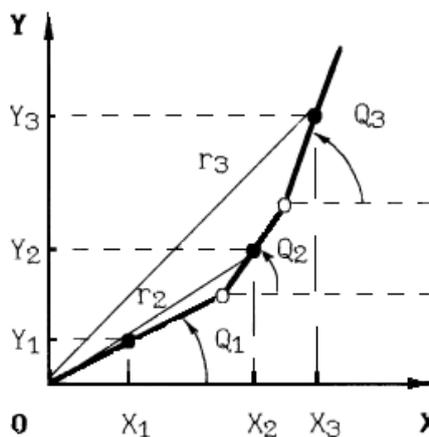


Рис. 4.10. Момент инерции трехзвенной биомеханической системы

Обозначим через X_1, X_2, X_3 – координаты центра масс первого, второго и третьего звена по оси Ox и соответственно через Y_1, Y_2, Y_3 – по оси Oy . Расстояния от начала системы координат, помещенной в точку опоры, до центра масс первого, второго и третьего звена обозначим через r_1, r_2, r_3 . В этом случае момент инерции рассматриваемой трехзвенной системы относительно оси Oz , проходящей через начало системы координат $Oxyz$ перпендикулярно плоскости рисунка, согласно (4.19), (4.22) определяется из выражения

$$J_o = J_1 + m_1 r_1^2 + J_2 + m_2 r_2^2 + J_3 + m_3 r_3^2. \quad (4.25)$$

Так как

$$r_1^2 = X_1^2 + Y_1^2, \quad r_2^2 = X_2^2 + Y_2^2, \quad r_3^2 = X_3^2 + Y_3^2,$$

а координаты центра масс звеньев (X_i, Y_i) выражаются в свою очередь через длины звеньев тела (L_i), обобщенные координаты (Q_i) и положение центра масс звеньев относительно оси шарниров (S_i), то соответственно имеем

$$r_1^2 = S_1^2 \cos^2 Q_1 + S_1^2 \sin^2 Q_1;$$

$$r_2^2 = L_1^2 \cos^2 Q_1 + 2L_1 S_2 \cos Q_1 \cos Q_2 + S_2^2 \cos^2 Q_2 + L_1^2 \sin^2 Q_1 + 2L_1 S_2 \sin Q_1 \sin Q_2 + S_2^2 \sin^2 Q_2;$$

$$r_3^2 = L_1^2 \cos^2 Q_1 + L_2^2 \cos^2 Q_2 + S_3^2 \cos^2 Q_3 + 2L_1 L_2 \cos Q_1 \cos Q_2 + 2L_1 S_3 \cos Q_1 \cos Q_3 + 2L_2 S_3 \cos Q_2 \cos Q_3 + L_1^2 \sin^2 Q_1 + L_2^2 \sin^2 Q_2 + S_3^2 \sin^2 Q_3 + 2L_1 L_2 \sin Q_1 \sin Q_2 + 2L_1 S_3 \sin Q_1 \sin Q_3 + 2L_2 S_3 \sin Q_2 \sin Q_3.$$

Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$r_1^2 = S_1^2;$$

$$r_2^2 = L_1^2 + 2L_1 S_2 \cos(Q_2 - Q_1) + S_2^2;$$

$$r_3^2 = L_1^2 + L_2^2 + S_3^2 + 2L_1 L_2 \cos(Q_2 - Q_1) + 2L_1 S_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2L_2 S_3 \cos(Q_3 - Q_2).$$

Подставляя полученные значения r_i в уравнения (63), получим соотношение вида

$$J_o = A_{11} + A_{22} + A_{33} + 2A_{12} \cos(Q_2 - Q_1) + 2A_{13} \cos(Q_3 - Q_1) + 2A_{23} \cos(Q_3 - Q_2), \quad (4.26)$$

где коэффициенты A_{ij} равны:

$$\begin{aligned} A_{11} &= J_1 + m_1 S_1^2 + L_1^2 (m_2 + m_3); \\ A_{12} &= L_1 (m_2 S_2 + m_3 L_2); \\ A_{13} &= m_3 S_3 L_1; \\ A_{22} &= J_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2; \\ A_{23} &= m_3 S_3 L_2; \\ A_{33} &= J_3 + m_3 S_3^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Таким образом, момент инерции биомеханической системы относительно оси, проходящей через точку опоры перпендикулярно плоскости движения, определяется динамическими характеристиками звеньев тела (A_{ij}) и обобщенными координатами системы. Уравнение (4.26) позволяет, при известных значениях коэффициентов A_{ij} и заданных значениях обобщенных координат, определить J_o для трехзвенной биомеханической системы любой конфигурации.

Аналитическое выражение момента инерции для N -звенной биомеханической системы построим при условии введения в формульную запись для коэффициентов A_{ij} символа Кронекера. Символ Кронекера равен

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Здесь i, j - буквенные индексы, соответствующие цифровым индексам коэффициентов A_{ij} . Используя символ Кронекера, можно записать представление коэффициентов A_{ij} для N -звенной биомеханической системы в виде

$$A_{ij} = \delta_{ij} (J_i + m_i S_i^2) + m_j L_i S_j (1 - \delta_{ij}) + \sum_{k=j+1}^N m_k L_i L_j, \\ i=1, 2, 3, \dots, N; \quad j=1, 2, 3, \dots, N; \quad \text{если } i>j, \text{ то } A_{ij} = A_{ji}; \quad (4.28)$$

При вычислении элементов квадратной матрицы по коэффициентам A_{ij} , необходимо учесть, что рассматриваемая матрица симметрична относительно главной диагонали. Поэтому ее симметричные элементы будут равны, т.е. при $j>i$ коэффициенты $A_{ji} = A_{ij}$. Представление коэффициентов A_{ij} в форме (4.28) делает быстрой и легкодоступной развернутую запись элементов A_{ij} с любыми значениями индексов и позволяет автоматизировать процесс их формирования на ЭВМ, задав исходные данные по массивам: J, m, L, S . Непосредственное их определение тем способом, которое было выполнено на примере трехзвенной модели, сопровождается продолжительными вычислениями, громоздкими записями, а в конечном итоге и техническими погрешностями.

В качестве примера ниже приводятся значения A_{ij} для четырехзвенной модели и развернутой записью формульного выражения коэффициентов A_{ij} по их представлению в (4.28)

$$A_{11} = J_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2 + m_4 L_1^2;$$

$$A_{12} = m_2 L_1 S_2 + m_3 L_1 L_2 + m_4 L_1 L_2;$$

$$A_{13} = m_3 L_1 S_3 + m_4 L_1 L_3;$$

$$A_{14} = m_4 L_1 S_4;$$

$$A_{22} = J_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2 + m_4 L_2^2 + m_4 L_2^2;$$

$$A_{23} = m_3 L_2 S_3 + m_4 L_2 L_3;$$

$$A_{24} = m_4 L_2 S_4;$$

$$A_{33} = J_3 + m_3 S_3^2 + m_4 L_3^2;$$

$$A_{34} = m_4 L_3 S_4;$$

$$A_{44} = J_4 + m_4 S_4^2.$$

Для получения аналитического выражения момента инерции N -звенной биомеханической системы относительно оси, проходящей через точку опоры перпендикулярно плоскости движения, запишем (4.25) в индексной символической форме. Имеем

$$J_o = \sum_{i=1}^N J_i + \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (4.29)$$

Учитывая, что любой из элементов массива g является функцией координат центра масс звеньев тела, определяемых согласно (4.17), и, вводя коэффициенты A_{ij} , получим в окончательном виде

$$J_o = \sum_{i=1}^N A_{ij} + 2 \sum_{i=1}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \cos(Q_j - Q_i). \quad (4.30)$$

Одним из факторов, определяющих биомеханику полетной части упражнений, является центральный момент инерции биомеханической системы – момент инерции относительно оси, проходящей через общий центр масс системы. В частности, в соскоковых упражнениях в гимнастике желательно дать количественную оценку центральному моменту инерции в момент потери спортсменом контакта со снарядом.

4.3. Кинематические характеристики движения

С помощью кинематических характеристик упражнений дается *качественная и количественная оценка* пространственных и временных показателей техники соревновательных упражнений. Так как с их помощью описывается только внешняя картина движения, то их использование позволяет оценить рациональность организации пространственной и временной структуры движения. Кинематические характеристики движения состоят из трех больших групп:

1. *Пространственные характеристики.*
2. *Временные характеристики.*
3. *Пространственно-временные характеристики.*

Каждая группа кинематических характеристик включает в себя еще несколько, относящихся к ней, биомеханических характеристик.

4.3.1. Пространственные характеристики

Пространственные характеристики движений включают в себя следующие характеристики:

- 1) координаты точки;
- 2) координаты тела;
- 3) координаты системы тел;
- 4) перемещение;
- 5) амплитуда;

б) траектория.

Классификация кинематических характеристик показана на рис. 4.11.



Рис. 4.11. Классификация кинематических характеристик двигательных действий

Общеизвестно, что в любом из механических законов, содержащем в явном или неявном виде пространственные и временные соотношения, находит свое отражение эволюция изучаемого объекта в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения необходимо уметь определять положение объекта в пространстве и во времени, тем самым, оценивая механическое состояние тела в любой момент времени.

Для определения положения тела и системы тел в пространстве необходимо выбрать *тело отсчета*, относительно которого рассматривается перемещение спортсмена. В качестве тела отсчета, выбирают неподвижные относительно Земли тела (дорожка, лыжня, гимнастические снаряды, оконный проем спортивного зала и т.п.). Обычно с телом отсчета связывают выбранную систему координат, с помощью которой определяется положение тела в пространстве.

Положение точки на плоскости в прямоугольной системе координат определяется так называемыми контрвариантными координатами (рис. 4.12).

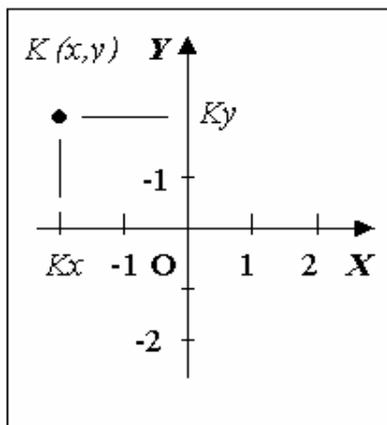


Рис. 4.12. Контрвариантные координаты точки

Для точки K контрвариантными координатами являются длины проекций отрезка KO , которые получаются при проектировании на координатные оси прямыми параллельными осям избранной системы координат. Координатам точки приписывается знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, лежит ли проекция точки на положительной или отрицательной части координатной оси. Зависимость знака координат точки от номера квадранта, в котором расположена эта точка, показана в таблице 4.5.

Т а б л и ц а 4.5

Знаки X, Y в квадранте

N	X	Y
1	+	+
2	-	+
3	-	-
4	+	-

Таким образом, каждой точке плоскости можно поставить в соответствие пару чисел – координат этой точки относительно заданной координатной системы. Положение точки K с абсциссой Kx и ординатой Ky сокращенно записывается в виде $K(x, y)$.

Положение точки на плоскости можно задать и другими способами, например, с помощью полярных координат (рис. 4.13). В этом случае полярные координаты точки K определяются полярным радиусом R (или расстоянием от

K до полюса O) и полярным углом Q между полярной осью и лучом, соединяющим полюс с точкой K . Положение точки K в полярных координатах записывается в виде $K(R, Q)$. При отсчете полярного угла от полярной оси против движения часовой стрелки полярный угол считается положительным и отрицательным при отсчете в противоположном направлении. Положительное направление полярного угла указано на рис. 4.13 стрелкой по окружности полярного радиуса. Таким образом, для единственного определения положения точки на плоскости в полярных координатах необходимо задать пару чисел: величину полярного угла и полярного радиуса.

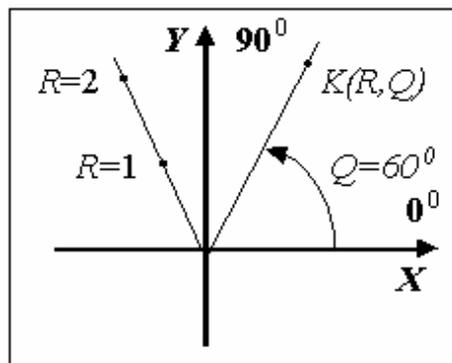


Рис. 4.13. Полярные координаты точки

Между положением точки, заданной в декартовых и полярных координатах, существуют определенные соотношения, следующие из простых геометрических построений и определения тригонометрических функций. Пусть полярная ось полярной системы координат совпадает с осью абсцисс декартовой системы координат, а полюс – с началом декартовой системы координат. Тогда точка K , имеющая в этих двух системах координаты $K(R, Q)$ и $K(x, y)$, будет иметь в другой системе следующие координаты.

В декартовой системе координат

$$X=R \cos Q, Y=R \sin Q. \quad (4.31)$$

Знаки координат точки K по оси абсцисс и оси ординат, соответствующие ее положению в определенном квадранте, учитываются знаком тригонометрических функций.

По заданным же значениям координат точки K в декартовой системе координат решается обратная задача по формулам (4.32): вычисляется полярный

радиус и полярный угол точки.

В полярной системе координат

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Q = \begin{cases} 90^\circ & \text{если } x = 0, y > 0; \\ 270^\circ & \text{если } x = 0, y < 0; \\ 180^\circ + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x < 0; \\ 360^\circ + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0, y < 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0, y > 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

На теле отсчета устанавливают начало и направление измерения расстояния, выбирают единицы отсчета (*система отсчета* – например, *прямоугольная система декартовых координат*). Точка пересечения взаимно перпендикулярных координатных осей (O) является началом системы отсчета (начало координат). Система принятых координат жестко связывается с телом отсчета, и в системе координат определяются различные кинематические характеристики изучаемого движения, начиная с координат точки, координат тела и координат системы тел (рис. 4.14).

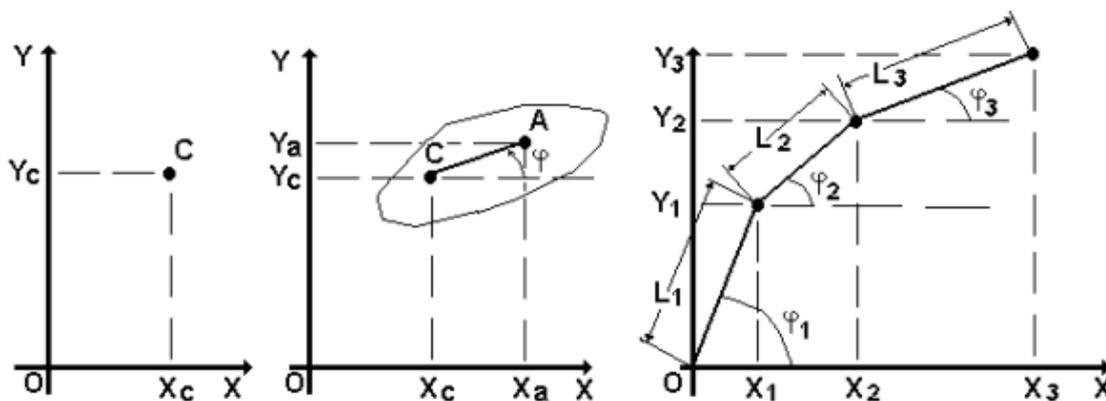


Рис. 4.14. Координаты точки, тела, системы тел

Чтобы определить положение заданной *точки* тела (C) относительно начала системы координат, определяют ее проекции (X_C, Y_C) на оси координат. Расстояния (O_{X_C}, O_{Y_C}) от начала системы координат до проекций этой точки на оси координат определяют положение данной точки C в данной системе отсчета O_{XY} .

Для определения положения *тела* необходимо определить:

1. Координаты двух точек (C, A) тела.
2. Координаты одной точки (C) и угол (φ) между точками (C, A) и осью Ox .

Ox .

Какой из этих способов предпочтительнее определяется содержанием решаемой задачи.

Координаты системы тел, в частности, биомеханической системы определяются на основе двух параметров: длины сегмента (L_i) и угла (φ_i) наклона сегмента (звена) к оси Ox . Например, для неразветвленной трехзвенной биомеханической системы формульные выражения координат плечевых (X_1, Y_1), тазобедренных (X_2, Y_2) и голеностопных (X_3, Y_3) суставов имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1 \cos \varphi_1, & Y_1 &= L_1 \sin \varphi_1; \\ X_2 &= L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2, & Y_2 &= L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2; \\ X_3 &= L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 + L_3 \cos \varphi_3, & Y_3 &= L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2 + L_3 \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Таким образом, координаты суставов, центра масс сегмента биомеханической системы можно определять по длине сегмента (звена) и углу наклона сегмента (звена) к оси Ox .

Для определения координат точки достаточно задать одну неподвижную систему координат. Иначе обстоит дело при определении координат тела: необходимо задать также и систему координат, связанную с телом.

Пусть тело совершает плоскопараллельное движение, т.е. такое, при котором траектории всех ее точек лежат в параллельных плоскостях. Возьмем координатную плоскость Oxy , совпадающую с плоскостью движения тела, и жестко связанную с телом подвижную систему координат Sx_1y_1 (рис. 4.15).

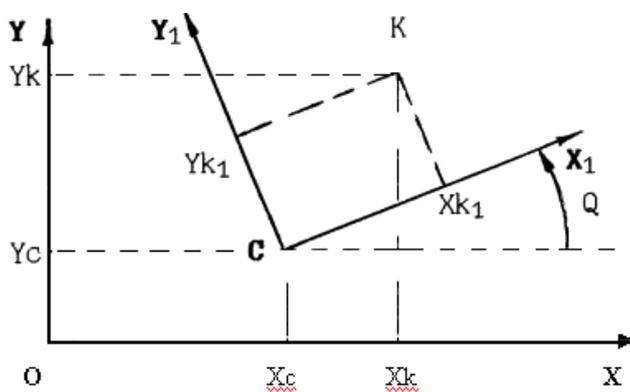


Рис.4.15. Подвижная и неподвижная системы координат

Относительно неподвижной системы координат тело может совершать движение в следующих направлениях:

- поступательное вдоль осей Ox и Oy ;
- вращательное в плоскости Oxy .

Таким образом, свободное движение тела в плоскопараллельном движении имеет три степени свободы, и его положение на плоскости Oxy можно задать тремя координатами. За эти координаты можно принять две координаты начала подвижной системы координат, которые обозначим через Xc и Yc , и угол Q , образованный осями подвижной и неподвижной системы координат.

Возьмем на твердом теле некоторую точку K , координатами которой в системе Oxy Xk и Yk , а в системе Sx_1y_1 , связанной с телом, – Xk_1 , Yk_1 .

Между координатами точки K в подвижной и неподвижной системах существуют определенные соотношения, выражающие, так называемую, прямую и обратную зависимости.

Прямая зависимость

По известным координатам точки K в неподвижной системе координат определяются координаты этой же точки в подвижной системе

$$\begin{aligned} Yk_1 &= (Yk - Yc) \cos Q - (Xk - Xc) \sin Q; \\ Xk_1 &= (Yk - Yc) \sin Q + (Xk - Xc) \cos Q. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Обратная зависимость

По известным координатам точки K в подвижной системе координат определяются координаты этой точки в неподвижной системе

$$\begin{aligned} Yk &= Yc + Yk_1 \cos Q + Xk_1 \sin Q; \\ Xk &= Xc - Yk_1 \sin Q + Xk_1 \cos Q. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Формулы (4.33), (4.34) являются уравнениями преобразования плоских декартовых координат и определяют так называемое ортогональное преобразование координат. В механике плоскопараллельных движений эти уравнения включают в себя по существу всю кинематику, так как на их основе определяются и скорости и ускорения точек твердого тела.

Уравнения существенно упрощаются, если точку K расположить на оси абсцисс подвижной системы координат, допустим, на расстоянии L от ее начала. В этом случае

Прямая зависимость (по условию)

$$Yk_1 = 0, \quad Xk_1 = L. \quad (4.35)$$

Обратная зависимость (из условия)

$$Yk = Yc + L \sin Q, \quad Xk = Xc + L \cos Q. \quad (4.36)$$

Если координаты начала подвижной системы координат и угол заданы в виде функций времени, то ортогональное преобразование определяет траекторию любого из возможных значений координат тела. И если на это движение не наложено никаких ограничений, то оно называется свободным, например, движение тела, брошенного под углом к горизонту.

При наложении же определенных ограничений на кинематику тела речь идет о несвободных или связанных движениях. Например, при движении физического маятника траектория любой из его точек ограничена радиусом вращения.

Различают два способа ограничения свободного движения – конструктивный и формальный. При конструктивном способе связанное движение задается посредством определенной конструкции, реализующей ограничение на свободное движение. При формальном способе дается математическое описание ограничений на координаты тела, налагаемые конструктивными особенностями рассматриваемого объекта.

Те конструктивные или формальные способы, которые накладывают ограничения на свободное движение тел, называются связями. Если связь конструктивна, то она существует или в виде конструкции, или в виде их описания. Формальная же связь задается уравнениями, которые в математической форме описывают налагаемые на тела связи. То есть с помощью математических соотношений связь формализуется.

Если рассматривается плоскопараллельное движение нескольких твердых тел, то конструктивную связь между ними можно задать с помощью хорошо известного в механике простого цилиндрического шарнира, так как такое соединение допускает вращательное движение соединенных между собой тел только в одной плоскости. Основная особенность подобной связи состоит в том, что центр шарнира остается неподвижным как для первого, так и для второго из соединенных тел. Каким образом формализуется конструктивная связь в виде цилиндрического шарнира, рассмотрим ниже.

Прежде чем установить определенные правила по вычислению координат системы тел, состоящей из произвольного множества элементов, рассмотрим подробнее этот вопрос на примере трехзвенной модели.

Допустим, что мы имеем свободную систему из трех опорных тел, не соединенных между собой. Как было показано ранее, для каждого из трех звеньев можно ввести координаты, характеризующие его положение на плоскости (рис. 4.16).

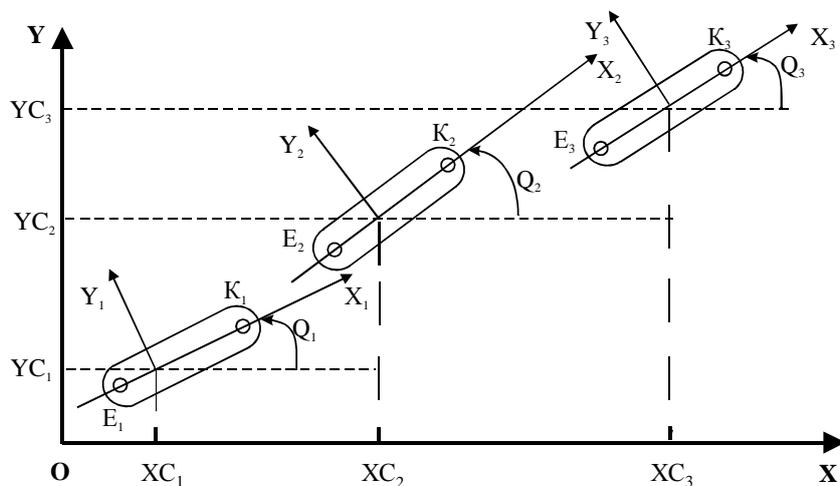


Рис. 4.16. Свободная система из трех опорных тел

Введем следующие обозначения. Припишем каждому порядковому номеру звена соответствующий цифровой индекс. Однотипные элементы каждого звена обозначим одной и той же буквой с цифровым индексом, соответствующим номеру звена. В принятых обозначениях будем иметь:

$C_1x_1y_1$ – подвижная система координат, связанная с первым телом;

$C_2x_2y_2$ – подвижная система координат, связанная со вторым телом;

$C_3x_3y_3$ – подвижная система координат, связанная с третьим телом;

Q_1, Q_2, Q_3 , – углы наклона оси абсцисс первой, второй, третьей подвижных систем координат к оси абсцисс неподвижной системы координат;

X_{c1}, X_{c2}, X_{c3} – координаты по оси Ox в неподвижной системе координат начала подвижных систем координат, соответственно для первого, второго, третьего звена;

Y_{c1}, Y_{c2}, Y_{c3} – координаты по оси Oy в неподвижной системе координат начала подвижных систем координат, соответственно для первого, второго, третьего звена.

На осях абсцисс подвижных систем координат отметим для каждого звена по две точки $E_1, K_1; E_2, K_2; E_3, K_3$, изображающие оси цилиндрических шарниров. Следовательно, при соединении тел в трехзвенную систему должны совпадать точки K_1 и E_2, K_2 и E_3 . Положим, что

$$E_1K_1 = L_1, \quad E_2K_2 = L_2, \quad E_3K_3 = L_3, \quad E_1C_1 = S_1, \quad E_2C_2 = S_2, \quad E_3C_3 = S_3.$$

Запишем в развернутой записи координаты отмеченных на звеньях точек до соединения звеньев в связанную систему. Воспользовавшись тем, что по условию оси шарниров расположены на осях подвижных систем координат, выполним ортогональное преобразование для этих точек по формулам (4.36)

$$\begin{aligned} Y_{k1} &= Y_{c1} + (L_1 - S_1) \sin Q_1, & Y_{E1} &= Y_{c1} - S_1 \sin Q_1, \\ X_{k1} &= X_{c1} + (L_1 - S_1) \cos Q_1, & X_{E1} &= X_{c1} - S_1 \cos Q_1; \\ \\ Y_{k2} &= Y_{c2} + (L_2 - S_2) \sin Q_2, & Y_{E2} &= Y_{c2} - S_2 \sin Q_2, \\ X_{k2} &= X_{c2} + (L_2 - S_2) \cos Q_2, & X_{E2} &= X_{c2} - S_2 \cos Q_2; & (4.37) \\ \\ Y_{k3} &= Y_{c3} + (L_3 - S_3) \sin Q_3, & Y_{E3} &= Y_{c3} - S_3 \sin Q_3, \\ X_{k3} &= X_{c3} + (L_3 - S_3) \cos Q_3, & X_{E3} &= X_{c3} - S_3 \cos Q_3. \end{aligned}$$

Развернутая запись координат осей шарниров опорных тел приведена здесь с определенным умыслом. Во-первых, здесь и в дальнейшем развернутая запись будет служить как в качестве контроля верности приводимых выкладок, так и для лучшего понимания существа излагаемого материала. Во-вторых, это одна из лучших иллюстраций того, что при моделировании биомеханических систем с большим числом степеней свободы вычислительные алгоритмы отличаются чрезвычайной громоздкостью, что неизбежно влечет к появлению технических погрешностей при составлении уравнений и их программировании на ЭВМ. И, в-третьих, эти обстоятельства наводят на мысль о том, что при составлении уравнений кинематики, необходимо использовать такой метод, который бы обеспечил автоматизированный вывод уравнений непосредственно ЭВМ, минуя их явную запись на бумаге.

С этой целью используем в формулах не цифровую, а буквенную индексацию. Например, обозначим через j номер опорного тела. При этом индекс j будет изменяться от $j=1$ до $j=N$, где N – количество опорных тел. В принятом обозначении уравнения координат осей шарниров опорных тел для j -го звена системы имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{kj} &= Y_{cj} + (L_j - S_j) \sin Q_j, & Y_{Ej} &= Y_{cj} - S_j \sin Q_j, \\ X_{kj} &= X_{cj} + (L_j - S_j) \cos Q_j, & X_{Ej} &= X_{cj} - S_j \cos Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Такой компактный вид приобретают формулы ортогонального преобразования для решаемой задачи. Подставляя в эти формулы значения индекса (т.е. вместо j записываем его цифровое содержание, соответствующее номеру звена), определяем координаты осей шарниров j -го звена. Значение j при этом может быть любым: 1, 2, 3, ..., 20, ..., N . Следует отметить, что система индексных обозначений чрезвычайно удобна, проста и дает большую экономию в выкладках, но она имеет свою специфику, и к ней необходимо просто привыкнуть.

Если совместить точки K_1 и E_2 , K_2 и E_3 и соединить их с помощью цилиндрических шарниров, то свободная система из трех опорных тел станет связанной. Так как при наложении подобной связи координаты точек K_1 и E_2 , K_2 и E_3 , являясь осями шарниров, будут попарно равны, то, очевидно, что условия равенства координат связанных точек запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} Y_{c1} + (L_1 - S_1) \sin Q_1 &= Y_{c2} - S_2 \sin Q_2, \\ X_{c1} + (L_1 - S_1) \cos Q_1 &= X_{c2} - S_2 \cos Q_2, \\ Y_{c2} + (L_2 - S_2) \sin Q_2 &= Y_{c3} - S_3 \sin Q_3, \\ X_{c2} + (L_2 - S_2) \cos Q_2 &= X_{c3} - S_3 \cos Q_3. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Приняв систему буквенных индексных обозначений, получим сокращенную запись уравнений (4.39)

$$\begin{aligned} Y_{cj} + (L_j - S_j) \sin Q_j &= Y_{c_{j+1}} - S_{j+1} \sin Q_{j+1}, \\ X_{cj} + (L_j - S_j) \cos Q_j &= X_{c_{j+1}} - S_{j+1} \cos Q_{j+1}; \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь, как и ранее, индекс j обозначает номер звена системы связанных тел. Универсальность уравнений (4.40) заключается в том, что они, в отличие от уравнений (4.39), не ограничиваются трехзвенной системой связанных тел, а распространяются на многозвенную систему, состоящую из N -го количества соединяемых тел. В приведенной записи уравнения удобны для программирования на ЭВМ, так как в этом случае отпадает необходимость развернутой записи. И при циклически построенной программе всего два уравнения в форме (4.40) охватывают любой N -звенник. В то же время, например, для одиннадцатизвенной модели необходимо записать в развернутой записи уже двадцать уравнений; экономия существенна.

Таким образом, конструктивная связь в виде цилиндрических шарниров, наложенная на цепочку из трех опорных тел, формализована в форме уравнений (4.39), а при распространении на N -звенную систему – в форме (4.40). Уравнения показывают, что если рассматриваемые равенства имеют место в любой момент времени движения системы тел, то эта система связанная. Уравнения, с помощью которых осуществляется наложение связи, называются уравнениями связи.

Так как наложение связи ограничивает произвол в направлении движения, то возникает возможность с помощью уравнений связи выразить некоторые координаты связанной системы тел через другие. Действительно, система из трех свободных звеньев имеет в плоскостном движении девять степеней свободы, так как каждое звено имеет три степени свободы. При наложении же на свободные звенья связей (4.39), получим связанный трехзвенник, кинематическая схема которого показана на рисунке 4.17.

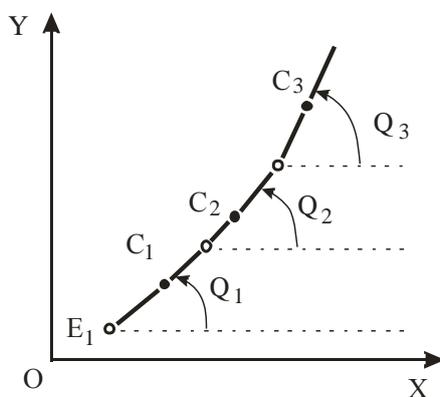


Рис. 4.17. Кинематическая схема свободного связанного трехзвенника

Для определения положения трехзвенника достаточно уже не девять координат звеньев тела, а только пять. Определим их из уравнений связи (4.39).

$$\begin{aligned}
 Y_{C_2} &= Y_{C_1} + (L_1 - S_1)\sin Q_1 + S_2\sin Q_2, \\
 X_{C_2} &= X_{C_1} + (L_1 - S_1)\cos Q_1 + S_2\cos Q_2; \\
 Y_{C_3} &= Y_{C_1} + (L_1 - S_1)\sin Q_1 + L_2\sin Q_2 + S_3\sin Q_3, \\
 X_{C_3} &= X_{C_1} + (L_1 - S_1)\cos Q_1 + L_2\cos Q_2 + S_3\cos Q_3.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Из приведенных уравнений видно, что линейные координаты второго и третьего звена выражаются через линейные координаты первого звена и углы наклона звеньев трехзвенника к оси Ox . Рассматриваемый трехзвенник имеет пять степеней свободы: вся система может перемещаться поступательно в плоскости Oxy вдоль осей Ox и Oy , а также каждое звено – вращаться в этой плоскости. Пяти степеням свободы соответствуют пять координат трехзвенника, называемые в механике обобщенными координатами, по которым и определяется положение трехзвенника на плоскости Oxy .

В данном случае обобщенными координатами являются:

- линейные координаты первого звена (Y_{C_1}, X_{C_1});
- углы наклона звеньев к оси Ox (Q_1, Q_2, Q_3).

Следовательно, положение свободной связанной трехзвенной системы тел на плоскости определяется заданными значениями линейных координат шарнира первого звена и углами наклона звеньев к оси Ox .

Уравнения (4.41) можно распространить и на свободную N -звенную систему связанных тел, что позволяет исследовать кинематику движений многозвенных биомеханических систем. Используя символьную запись, получим следующие уравнения для определения координат связанной N -звенной системы тел:

$$\begin{aligned} Y_{C_i} &= Y_{C_1} - S_1 \sin Q_1 + \sum_{j=2}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i ; \\ X_{C_i} &= X_{C_1} - S_1 \cos Q_1 + \sum_{j=2}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i ; \\ j &= 2, 3, \dots , \quad N, i = 1, 2, \dots , N. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь j, i – номер звена; N – количество в связанной системе тел.

При $i = 1$ координаты центра шарнира первого звена (E_1) равны Y_{C_1} и X_{C_1} . Если потребовать, чтобы точка E_1 трехзвенника (рис. 4.16) совпадала с началом системы координат и закрепить ее там, то тем самым возможность перемещения рассматриваемой системы тел еще более ограничится. Вместо пяти степеней свободы остается три, соответственно числу тел в системе. Уравнения связи, означающие закрепление точки E_1 в начале системы координат, имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{C_1} - S_1 \sin Q_1 &= 0; \\ X_{C_1} - S_1 \cos Q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Выразим линейные координаты трехзвенника через угловые координаты. Из уравнений связи (4.39) получим

$$\begin{aligned} X_{C_1} &= S_1 \cos Q_1; \\ Y_{C_1} &= S_1 \sin Q_1; \\ X_{C_2} &= L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2; \\ Y_{C_2} &= L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2; \\ X_{C_3} &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3; \\ Y_{C_3} &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Как видно из уравнений, все линейные координаты точек C_i трехзвенника выражены через длины звеньев системы (L_i), расстояния от оси вращения звеньев до начала подвижных систем координат (S_i) и тригонометрические функции углов наклона звеньев (Q_i) к оси Ox . Три угла Q_i трехзвенника являются обобщенными координатами. Зная их, можно по уравне-

ниям (4.45) определить все шесть координат точек C_i в декартовой системе координат. Для N -звенной системы тел уравнения (4.44) в индексных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} X_{C_i} &= S_i \cos Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j ; \\ Y_{C_i} &= S_i \sin Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j ; \\ j &= 2, 3, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Здесь j, i – номер звена; N – количество звеньев системы.

Координаты центра масс звеньев тела человека и суставов определяются по вышерассмотренной методике. Для этого воспользуемся произволом в выборе расположения начала подвижных систем координат и поместим их в центр масс звеньев модели. Из уравнений связи получим уже знакомые нам формулы по определению *координат центра масс звеньев* тела человека

$$\begin{aligned} X_{C_1} &= S_1 \cos Q_1; \\ Y_{C_1} &= S_1 \sin Q_1; \\ X_{C_2} &= L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2; \\ Y_{C_2} &= L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2; \\ X_{C_3} &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3; \\ Y_{C_3} &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3, \end{aligned} \quad (4.46)$$

а для N -звенной модели имеем

$$\begin{aligned} X_{C_i} &= S_i \cos Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j ; & Y_{C_i} &= S_i \sin Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j ; \\ & & i &= 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь i – номер звена модели; X_{C_i} – координата центра масс i -го звена по оси абсцисс; Y_{C_i} – координата центра масс i -го звена по оси ординат; N – количество звеньев модели.

Отсюда видно, что положение центра масс звеньев модели вполне определено, если обобщенные координаты заданы в виде углов, образуемых кинематическими звеньями с осью абсцисс. Аналогичным образом, для определения координат осей шарниров поместим начало подвижной системы координат в дистальные оси шарниров: для первой системы координат – шарнир, соединя-

ющий первое звено со вторым; для второй – шарнир, соединяющий второе звено с третьим и т.д. Из уравнений связи для трехзвенной модели получим следующие выражения, определяющие *координаты суставов звеньев* тела человека

$$\begin{aligned}
 X_{O_1} &= L_1 \cos Q_1; \\
 Y_{O_1} &= L_1 \sin Q_1; \\
 \\
 X_{O_2} &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2; \\
 Y_{O_2} &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2; \\
 \\
 X_{O_3} &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3; \\
 Y_{O_3} &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3,
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

а для N -звенной модели имеем

$$\begin{aligned}
 X_{O_i} &= \sum_{j=1}^i L_j \cos Q_j; \quad Y_{O_i} = \sum_{j=1}^i L_j \sin Q_j; \\
 i &= 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Здесь X_{O_i} – координата дистального шарнира для i -го звена по оси Ox ; Y_{O_i} – координата дистального шарнира для i -го звена по оси Oy .

Перемещение – разность координат между конечным и начальным положением (рис.4.18).

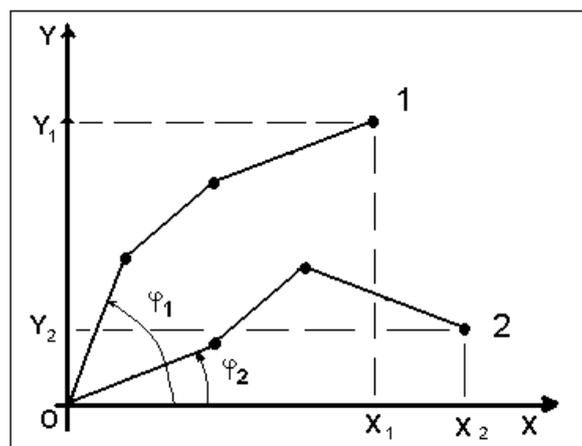


Рис. 4.18. Линейное и угловое перемещение

Различают линейное и угловое перемещение. Пусть, трехзвенная биомеханическая система переместилась из начального положения (рис. 4.18, кадр 1) в конечное положение (рис. 4.18, кадр 2).

Линейное перемещение третьего сустава (голеностопный) по осям Ox и Oy выразится формулами

$$\Delta X = X_2 - X_1, \quad \Delta Y = Y_2 - Y_1.$$

Здесь следует обратить внимание на знаки перемещения: положительное или отрицательное перемещение. Если перемещение совершалось в положительном направлении числовой оси (ΔX), знак перемещения положительный. Если перемещение происходило против положительного направления числовой оси (ΔY), знак перемещения отрицательный.

Угловое перемещение первого звена (рис. 4.18) определяется из выражения

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

И здесь следует также обратить внимание на знаки углового перемещения: положительное или отрицательное перемещение. Если вращение звена происходило по направлению движения часовой стрелки, знак перемещения отрицательный, против движения часовой стрелки – положительный.

Амплитуда – размах движения. Различают амплитуду движения звеньев тела и амплитуду сгибательно-разгибательных движений спортсмена в суставах.

Траектория – геометрическое место положений точки в рассматриваемой системе отсчета.

4.3.2. Временные характеристики

К *временным характеристикам* относятся:

1. Момент времени начала и окончания упражнения.
2. Длительность выполнения упражнения – измеряется разностью моментов времени окончания и начала упражнения (движения).
3. Момент времени начала и окончания какой-либо части упражнения (полетная часть, опорная часть, сгибательное движение и т.п.).
4. Длительность выполнения какой-либо части упражнения.

5. Темп – измеряется количеством движений в единицу времени (частота движений).

6. Ритм – определяется по соотношению длительности выполнения отдельных частей упражнения.

Кроме определения *пространственных* характеристик движения, по материалам оптической регистрации движений определяют и *временные* характеристики.

При выполнении кинорегистрации упражнения, на кинокамере заранее устанавливают одну (в соответствии с задачами исследования) из стандартных частот киносъемки: 16, 24, 32, 48 или 64 кадра в секунду. Если обозначить частоту киносъемки символом L , то временной промежуток между двумя ближайшими кинокадрами (h) запишем в виде

$$h = \frac{1}{L} . \quad (4.50)$$

Например, если частота киносъемки составляла 24 кадра в секунду, то временной интервал между двумя ближайшими кинокадрами равен $1/24$ с.

Эти данные позволяют определить временные характеристики движения. Допустим, длительность выполнения упражнения (или его части) по числу кинокадров составила 12 кадров, при частоте киносъемки 24 кадра в секунду. Обозначим символом n число кинокадров упражнения (или его части). Тогда, длительность выполнения упражнения (t) равна

$$t = \frac{n}{L} . \quad (4.51)$$

В нашем случае $t = 12/24 = 0,5$ с. Аналогичным образом, зная частоту киносъемки и количество кинокадров какой-либо фазы движения, определяют длительность выполнения исследуемой фазы движения.

При фотоциклосъемке продолжительность выполнения отдельных фаз двигательного действия (t) определяют в соответствии с уравнением (4.50)

$$t = \frac{n}{kL} . \quad (4.52)$$

Здесь: n – количество кадров выполнения отдельных фаз двигательного действия; k – число прорезей во вращающемся диске; L – количество оборотов диска в секунду.

4.3.3. Пространственно-временные характеристики

К пространственно-временным характеристикам относятся:

1. Скорость (линейная и угловая).
2. Ускорение (линейное и угловое).

Скорость характеризует быстроту изменения положения движущегося тела. Скорость (V) определяется отношением пройденного пути (ΔS) к затраченному времени (Δt)

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Как линейная, так и угловая скорость, может быть как положительной величиной, так и отрицательной. Знак скорости зависит от знака ΔS .

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и направлению. Ускорение (a) определяется отношением изменения скорости (ΔV) к затраченному на него времени (Δt)

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Ускорение – величина векторная. Ускорение точки положительное, если скорость увеличивается. Ускорение точки отрицательное, если скорость уменьшается. В точках максимума и минимума скорости ускорение равно нулю.

Определение линейной скорости и ускорения точки по материалам оптической регистрации движений

Для определения линейной скорости звеньев тела необходимо продифференцировать функцию, которая определяет траекторию рассматриваемой точки звена. Данная функция в виде числовой последовательности координат точки является результатом инструментальных измерений и задана табличным способом. Каждому номеру кинокадра соответствует определенное значение времени

и линейных координат точки по осям Ox , Oy декартовой системы координат Oxy . Следовательно, линейные координаты биомеханической системы, в процессе выполнения физических упражнений, изменяются по определенному закону, но эта зависимость задана не в аналитической форме, а в табличном виде, и к ней нельзя применить прием аналитического нахождения производной. В этом случае, для определения средней скорости изменения функции на некотором интервале времени, можно воспользоваться любым из методов численного дифференцирования.

Метод конечных разностей по трем ординатам является одним из наиболее легко алгоритмизируемых вариантов численного дифференцирования и привлекает своей простотой и доступностью для программирования на ПЭВМ. Технология использования этого метода в биомеханических исследованиях кинематики упражнений, на заключительном этапе которого используется ПЭВМ, заключается в следующем.

В результате выполнения промера исследуемого упражнения и считывания линейных координат точки составляется таблица, в которую заносятся линейные координаты точки соответственно каждому номеру кинокадра. В качестве аргумента функций линейных координат рассматривается время, которое вычисляется по данным частоты киносъемки. К примеру, киносъемка проводилась с частотой K кадров в секунду. Тогда временной интервал между двумя ближайшими кинокадрами (Δt) равен

$$\Delta t = 1/K. \quad (4.53)$$

Для рассматриваемых табулируемых величин функции значения аргумента в таблице, называемые узлами, образуют арифметическую прогрессию, разность которой h называется шагом таблицы (рис. 4.19).

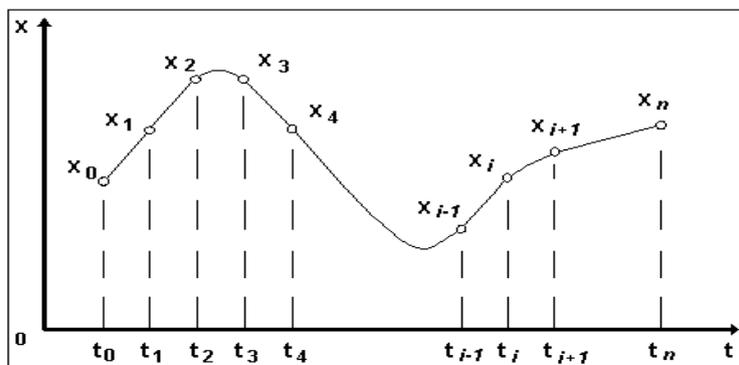


Рис. 4.19. Узлы (t_i) и значения (X_i) табулируемой функции

$$h = \Delta t = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, 2, 3, \dots, n-1. \quad (4.54)$$

Первая и вторая производная линейных координат по времени, заданных в табличном виде, для каждого i -го номера кинокадра определяются из симметричных конечно-разностных отношений по значениям функции X_{i-1} , X_i , X_{i+1}

$$\dot{X}_i = \frac{(X_{i+1} - X_{i-1}))}{2h}, \quad \ddot{X}_i = \frac{(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}))}{h^2}. \quad (4.55)$$

Здесь \dot{X}_i , \ddot{X}_i – приближенные значения первой и второй производной линейных координат точки по оси Ox в момент времени $t = t_i$, i – номер кинокадра, h – интервал времени между двумя ближайшими кинокадрами, определяемый как $1/K$, где K – частота киносъемки.

Так как для первого (1) и последнего (n) кадра определить линейную скорость и ускорение, используя формулы (4.55), невозможно, то в этом случае можно использовать формулы Милна

$$\dot{X}_1 = \frac{(-X_3 + 4X_2 - 3X_1)}{2h}, \quad \dot{X}_n = \frac{(3X_n - 4X_{n-1} + X_{n-2}))}{h^2}. \quad (4.56)$$

$$\ddot{X}_1 = \frac{(-\dot{X}_3 + 4\dot{X}_2 - 3\dot{X}_1)}{2h}, \quad \ddot{X}_n = \frac{(3\dot{X}_n - 4\dot{X}_{n-1} + \dot{X}_{n-2}))}{h^2}. \quad (4.57)$$

Первая и вторая производные линейных координат по времени для произвольной точки по оси Oy , заданных в табличном виде, определяются аналогичным образом.

Так, например, допустим, в результате считывания координат плечевого сустава по промеру упражнения была получена следующая таблица (табл. 4.6). Исследуемое упражнение – большой оборот назад на перекладине.

Здесь, во второй колонке таблицы, представлены координаты плечевого сустава (X_i) по оси Ox , соответствующие i -му номеру видеокadra. Частота захвата видеокadra при записи в память ПЭВМ составляла 25 кадров в секунду. Отсюда следует, что h равнялось 0,04 с. Вычисления для первой и последней точки траектории не выполнялись.

Координаты X_i плечевого сустава по оси Ox и вычисленные значения линейной скорости \dot{X}_i и линейного ускорения \ddot{X}_i

№ кинокадра (i)	X_i (м)	$(X_{i+1} - X_{i-1})$ (м)	$(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1})$ (м)	\dot{X}_i (м/с)	\ddot{X}_i (м/с ²)
1	0,259				
2	0,268	$0,275-0,259=0,016$	$0,259-2\cdot 0,268+0,275=-0,002$	0,2000	-1,250
3	0,275	$0,291-0,268=0,023$	$0,268-2\cdot 0,275+0,291=0,009$	0,2875	5,625
4	0,291	$0,298-0,275=0,023$	$0,275-2\cdot 0,291+0,298=-0,009$	0,2875	-5,625
5	0,298	$0,312-0,291=0,021$	$0,291-2\cdot 0,298+0,312=0,007$	0,2625	4,375
6	0,312	$0,325-0,298=0,027$	$0,298-2\cdot 0,312+0,325=-0,001$	0,3375	-0,625
7	0,325	$0,338-0,312=0,026$	$0,312-2\cdot 0,325+0,338=0,000$	0,3250	0,000
8	0,338	$0,349-0,325=0,024$	$0,325-2\cdot 0,338+0,349=-0,002$	0,3000	-1,250
9	0,349	$0,360-0,338=0,022$	$0,338-2\cdot 0,349+0,360=0,000$	0,2750	0,000
10	0,360	$0,368-0,349=0,019$	$0,349-2\cdot 0,360+0,368=-0,003$	0,2375	-1,875
11	0,368				

Линейную скорость суставов звеньев тела можно определить из уравнений координат суставов (19), (20), продифференцировав их по времени. В этом случае необходимо учесть, что дифференцируемая функция – сложная функция. Действительно, так как координаты суставов в прямоугольной системе Oxy определяются через обобщенные координаты, а они в свою очередь являются функцией времени, то для любого из суставов выполняется соотношение

$$X=F(Q), \quad Q=f(t).$$

А так как функции Q и X имеют производные, то по правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial Q} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (4.58)$$

Воспользуемся приведенным уравнением (26) для определения линейной скорости шарниров трехзвенной биомеханической модели. Координаты (X , Y) плечевых суставов для первого звена определяются из выражений

$$X_1 = L_1 \cos Q_1, \quad Y_1 = L_1 \sin Q_1.$$

На основании дифференцирования сложных функций имеем

$$\dot{X}_1 = \frac{dX_1}{dt} = \frac{\partial(L_1 \cos Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt}, \quad \dot{Y}_1 = \frac{dY_1}{dt} = \frac{\partial(L_1 \sin Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt}. \quad (4.59)$$

Продифференцируем отдельно правые части уравнений (4.59) по промежуточным аргументам

$$\frac{\partial(L_1 \cos Q_1)}{\partial Q_1} = -L_1 \cos Q_1; \quad \frac{\partial(L_1 \sin Q_1)}{\partial Q_1} = L_1 \cos Q_1; \quad \frac{dQ_1}{dt} = \dot{Q}_1.$$

Окончательно получим

$$\dot{X}_1 = -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1; \quad \dot{Y}_1 = L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1. \quad (4.60)$$

Следовательно, линейная скорость дистального шарнира первого звена по оси Ox (\dot{X}_1) и по оси Oy (\dot{Y}_1) определяется на основании значений первой обобщенной координаты (Q_1), ее первой производной (\dot{Q}_1) и длины первого звена (L_1).

В такой же подробной записи рассмотрим определение линейной скорости дистального шарнира второго звена (тазобедренные суставы). Координаты рассматриваемой точки (X_2 , Y_2), являющиеся осью шарнира, находятся из выражений

$$X_2 = L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2; \\ Y_2 = L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2.$$

Дифференцируя по времени, с учетом (4.58) находим

$$\dot{X}_2 = \frac{dX_2}{dt} = \frac{\partial(L_1 \cos Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} + \frac{\partial(L_2 \cos Q_2)}{\partial Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt}; \\ \dot{Y}_2 = \frac{dY_2}{dt} = \frac{\partial(L_1 \sin Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} + \frac{\partial(L_2 \sin Q_2)}{\partial Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt}; \quad (4.61)$$

Дифференцируя правые части уравнений (4.61) по промежуточным аргументам и замечая, что

$$\frac{\partial(L_1 \cos Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \dot{X}_1; \quad \frac{\partial(L_1 \sin Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \dot{Y}_1,$$

получим

$$\frac{\partial(L_2 \cos Q_2)}{\partial Q_2} = -L_2 \sin Q_2; \quad \frac{\partial(L_2 \sin Q_2)}{\partial Q_2} = L_2 \cos Q_2; \quad \frac{dQ_2}{dt} = \dot{Q}_2.$$

И в окончательной форме для \dot{X}_2 и \dot{Y}_2 имеем

$$\dot{X}_2 = -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2; \quad \dot{Y}_2 = L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2. \quad (4.62)$$

Аналогичным образом, не приводя подробных выкладок, определим, что линейная скорость дистального шарнира третьего звена по оси Ox (\dot{X}_3) и по оси Oy (\dot{Y}_3) находится из выражений

$$\begin{aligned}\dot{X}_3 &= -L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3 \sin Q_3; \\ \dot{Y}_3 &= L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\dot{Q}_3 \cos Q_3.\end{aligned}\quad (4.63)$$

Таким образом, линейные скорости суставов звеньев тела человека (\dot{X}_i , \dot{Y}_i) можно определить исходя из значений обобщенных координат (Q_i), их первых производных по времени (\dot{Q}_i) и длин звеньев тела (L_i). Распространяя уравнения (4.62), (4.63) на N -звенную модель тела человека, получим следующие выражения для определения линейной скорости дистального шарнира i -го звена:

$$\dot{X}_i = -\sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \sin Q_j; \quad \dot{Y}_i = \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \cos Q_j. \quad (4.64)$$

Для определения линейного ускорения осей шарниров рассматриваемой модели опорно-двигательного аппарата тела человека необходимо найти вторую производную по времени от значений координат осей шарниров. Первая производная дает выражения (4.64), определяющие линейную скорость осей шарниров в прямоугольной системе координат. Их последующее дифференцирование по времени даст вторую производную или линейное ускорение шарниров. Обозначим, как это и принято в механике, вторую производную через исходную функцию с двумя точками над ней. Тогда для первого звена имеем

$$\ddot{X}_1 = (\dot{X})' = \frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt}; \quad \ddot{Y}_1 = (\dot{Y})' = \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt}.$$

Так как L_1 – постоянная, а $Q_1 = f(t)$ и $\dot{Q}_1 = F(t)$ – функции, имеющие производные, то, по правилу дифференцирования произведения двух функций с константой, имеем

$$\frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt} = \frac{d(-L_1\dot{Q}_1)}{dt} \sin Q_1 + \frac{d(\sin Q_1)}{dt} (-L_1\dot{Q}_1);$$

$$\frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt} = \frac{d(L_1\dot{Q}_1)}{dt} \cos Q_1 + \frac{d(\cos Q_1)}{dt} (L_1\dot{Q}_1).$$

Выполнив последовательно дифференцирование для отдельных сомножителей, получим

$$\frac{d(-L_1\dot{Q}_1)}{dt} = -L_1\ddot{Q}_1; \quad \frac{d(\sin Q_1)}{dt} = \frac{\partial(\sin Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \dot{Q}_1 \cos Q_1;$$

$$\frac{d(L_1\dot{Q}_1)}{dt} = L_1\ddot{Q}_1; \quad \frac{d(\cos Q_1)}{dt} = \frac{\partial(\cos Q_1)}{\partial Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = -\dot{Q}_1 \sin Q_1.$$

Окончательно имеем

$$\ddot{X}_1 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1;$$

$$\ddot{Y}_1 = L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1. \quad (4.65)$$

Линейное ускорение оси дистального шарнира (\ddot{X}_2, \ddot{Y}_2) для второго звена имеет вид

$$\ddot{X}_2 = (\dot{X}_1)' = \frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2)}{dt};$$

$$\ddot{Y}_2 = (\dot{Y}_1)' = \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2)}{dt}.$$

Правые части уравнений можно представить в виде

$$\frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2)}{dt} = \frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt} + \frac{d(-L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2)}{dt};$$

$$\frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2)}{dt} = \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt} + \frac{d(L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2)}{dt}.$$

Замечая, что

$$\frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt} = \ddot{X}_1, \quad \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt} = \ddot{Y}_1,$$

и выполнив дифференцирование оставшихся членов правой части уравнений, получим

$$\ddot{X}_2 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2;$$

$$\ddot{Y}_2 = +L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2. \quad (4.66)$$

Определяя аналогичным образом линейное ускорение дистального шарнира (\ddot{X}_3, \ddot{Y}_3) третьего звена, получим уравнение вида

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_3 &= -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3\ddot{Q}_3 \sin Q_3 \\
&\quad - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \cos Q_3; \\
\ddot{Y}_2 &= +L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\ddot{Q}_3 \cos Q_3 \\
&\quad - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \sin Q_3.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Для N -звенной модели формулы, определяющие линейное ускорение оси дистального шарнира i -го звена, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_i &= \sum_{j=1}^i -L_j\ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^i L_j\dot{Q}_j^2 \cos Q_j; \\
\ddot{Y}_i &= \sum_{j=1}^i L_j\ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^i L_j\dot{Q}_j^2 \sin Q_j.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Следовательно, для вычисления значений линейного ускорения суставов звеньев тела спортсмена по материалам оптической регистрации движений достаточно знать длины звеньев тела и обобщенные координаты, а затем, вычислив первые и вторые производные от обобщенных координат по времени, определить искомые величины.

Угловая скорость и ускорение звеньев тела

Первая и вторая производная от обобщенных координат (углы наклона звеньев биомеханической системы к оси Ox) по времени, заданных в табличном виде, определяются из симметричных конечно-разностных отношений

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h}, \quad \ddot{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2}, \tag{4.69}$$

где $\dot{\varphi}_i$, $\ddot{\varphi}_i$ – приближенные значения первой и второй производной от обобщенных координат φ_i по времени в момент времени $t = t_i$, i – номер кинокадра.

Учитывая, что в механике угловая скорость измеряется в рад/с, формулы для определения угловой скорости и ускорения звеньев тела на основании равенств (4.69) примут вид

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\pi(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{360h}, \quad \ddot{\varphi}_i = \frac{\pi(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})}{180h^2}. \tag{4.70}$$

Здесь π – символ числа «пи».

Есть смысл более популярно объяснить смысл значения радиан. Начнем с того, что в окружности 360° . И в то же время это – 2π радиан. Следовательно, в грубом приближении, можно сказать, что 1 радиан равен примерно 60° , так как 360° деленное на 2π равно $360/6,28\dots$, или $\approx 60^\circ$.

Поэтому, если, допустим, за одну секунду произошло перемещение, к примеру, ног на 120° , то угловая скорость ног составляет 2 радиана в секунду. Если за одну секунду совершается поворот на 360° , то угловая скорость ног равна $6,28\dots$ радиан в секунду. При повороте на 180° , угловая скорость равна примерно 3 радианам в секунду.

Для первой и конечной точки траектории угловая скорость и угловое ускорение звеньев тела спортсмена вычисляются по формулам Милна.

Линейная скорость и линейное ускорение ОЦМ биомеханической системы

Одним из основных факторов, определяющих полетную фазу упражнений и связанных с траекторией ОЦМ биомеханической системы в безопорном положении, является скорость ОЦМ тела в момент потери контакта спортсмена с опорой. Уравнения координат ОЦМ системы (4.16) позволяют определить искомые характеристики в аналитической форме.

Дифференцируя уравнения (4.16) по времени, получим следующие зависимости, определяющие линейную скорость перемещения ОЦМ биомеханической системы по горизонтали (\dot{X}_c) и по вертикали (\dot{Y}_c) для трехзвенной модели:

$$\begin{aligned}\dot{X}_c &= -A_1\dot{Q}_1 \sin Q_1 - A_2\dot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3\dot{Q}_3 \sin Q_3, \\ \dot{Y}_c &= A_1\dot{Q}_1 \cos Q_1 + A_2\dot{Q}_2 \cos Q_2 + A_3\dot{Q}_3 \cos Q_3.\end{aligned}\tag{4.71}$$

Результирующая скорость ОЦМ (R) находится из выражения

$$R = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2}.$$

Для N -звенной модели биомеханической системы на основании уравнений (4.16) получим следующие зависимости:

$$\dot{X}_C = -\sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i \sin Q_i, \quad \dot{Y}_C = \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i \cos Q_i. \quad (4.72)$$

Выполнив дифференцирование уравнений (4.72) по времени, получим выражения, определяющие линейное ускорение ОЦМ трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека по осям OX, Oy

$$\begin{aligned} \ddot{X}_C &= -A_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - A_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - \\ &\quad - A_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - A_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - A_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ \ddot{Y}_C &= A_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + A_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + A_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - \\ &\quad - A_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - A_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - A_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3. \end{aligned}$$

Для N -звенной биомеханической системы аналогичные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{X}_C &= -\sum_{i=1}^N A_i \ddot{Q}_i \sin Q_i - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i^2 \cos Q_i, \\ \ddot{Y}_C &= \sum_{i=1}^N A_i \ddot{Q}_i \cos Q_i - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i^2 \sin Q_i. \end{aligned} \quad (4.73)$$

4.4. Динамические характеристики движений

Кинематические характеристики, определяя геометрию движения, не учитывают движущиеся массы и действующие силы и поэтому не в состоянии дать ответ на вопрос о причинах возникновения и изменения движений. *Причины возникновения и изменения движений* раскрывает динамика с использованием *динамических характеристик*, включающих в себя, так же, как и кинематические характеристики, три большие группы характеристик (рис. 4.20):

- 1) *силовые*;
- 2) *инерционные*;
- 3) *энергетические*.

Непосредственно к основным *силовым характеристикам* относятся:

1. *Сила* – мера механического воздействия одного тела на другое в данный момент времени в *поступательных* движениях.

2. *Момент силы* – мера вращающего действия силы на тело. Момент силы определяется произведением силы на ее плечо. Плечо силы – перпендикуляр, восстановленный от оси вращения на линию действия силы.

3. *Сила реакции опоры* – мера противодействия опоры при действии на нее тела, находящегося с ней в контакте (в покое – статическая или в движении – динамическая).

4. *Сила действия среды* – мера действия внешней среды на тело (выталкивающая сила, подъемная сила, сила трения, сила сопротивления внешней среды).

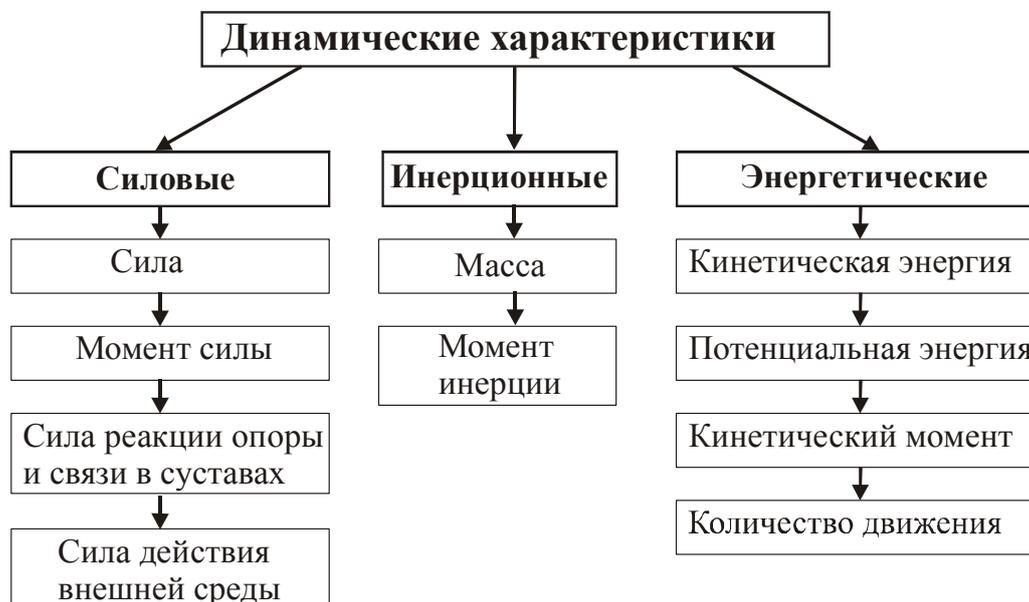


Рис.4.20. Классификация динамических характеристик двигательных действий

К основным *инерционным характеристикам* относятся:

– *Момент инерции* – мера инертности тела во вращательном движении.

Численно момент инерции равен сумме произведений масс всех частиц тела на квадрат расстояния каждой частицы до оси вращения.

– *Масса* – мера инертности тела при поступательном движении. Она измеряется отношением приложенной силы к вызываемому силой ускорению.

Основные *энергетические характеристики*:

1. *Кинетическая энергия* – энергия движущегося тела (энергия движения).

Кинетическая энергия может трансформироваться в потенциальную энергию.

При поступательном движении кинетическая энергия определяется половиной

произведения массы тела и квадрата его линейной скорости. В сложном движении при определении кинетической энергии (T) учитывается и вращательная составляющая движущегося тела

$$T = \frac{m\mathcal{Q}^2}{2} + \frac{J\dot{\phi}^2}{2}. \quad (4.74)$$

Таким образом, кинетическая энергия будет определяться суммой кинетических энергий поступательного и вращательного движения. Для вращательной компоненты движения кинетическая энергия определяется половиной произведения момента инерции и его угловой скорости.

Движение биомеханической системы является сложным движением, так как оно включает в себя поступательную и вращательную компоненты, соотносимые к каждому звену рассматриваемой модели. Действительно, в процессе выполнения спортсменом различных упражнений как центр масс каждого сегмента (звена) совершает поступательное движение относительно внешней системы отсчета, так и каждый сегмент (звено) совершает вращательное движение, одной из характеристик которого является угловая скорость. Поэтому, в соответствии с выражением (4.74), кинетическую энергию для первого звена трехзвенной модели запишем в виде

$$T_1 = \frac{m_1(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2)}{2} + \frac{J_1\dot{Q}_1^2}{2}, \quad (4.75)$$

где

\dot{X}_1 – линейная скорость центра масс первого звена по оси Ox декартовой системы координат; \dot{Y}_1 – линейная скорость центра масс первого звена по оси Oy декартовой системы координат; \dot{Q}_1 – угловая скорость первого звена; J_1 – центральный момент инерции первого звена; m_1 – масса первого звена; T_1 – кинетическая энергия первого звена.

Оставив принятые обозначения и введя для второго звена цифровой индекс 2, получим уравнение кинетической энергии для второго звена в виде

$$T_2 = \frac{m_2(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)}{2} + \frac{J_2\dot{Q}_2^2}{2}, \quad (4.76)$$

И, аналогичным образом, для третьего звена имеем

$$T_3 = \frac{m_3(\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2)}{2} + \frac{J_3\dot{Q}_3^2}{2}. \quad (4.77)$$

Выполним дальнейшие преобразования. Заменяем линейные скорости центров масс звеньев тела на их выражения через обобщенные скорости и длины звеньев тела. Получим:

для первого звена

$$\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2 = S_1^2 \dot{Q}_1^2,$$

для второго звена

$$\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2 = L_1^2 \dot{Q}_1^2 + S_2^2 \dot{Q}_2^2 + 2L_1 S_2 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1),$$

для третьего звена

$$\begin{aligned} \dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2 = & L_1^2 \dot{Q}_1^2 + L_2^2 \dot{Q}_2^2 + S_3^2 \dot{Q}_3^2 + 2L_1 L_2 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + \\ & + 2L_1 S_3 \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2L_2 S_3 \dot{Q}_2 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2). \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнения (4.75), (4.76), (4.77). Окончательно имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(J_1 + m_1 S_1^2) \dot{Q}_1^2}{2}, \\ T_2 &= \frac{m_2 L_1^2 \dot{Q}_1^2 + (J_2 + m_2 S_2^2) \dot{Q}_2^2 + 2m_2 L_1 S_2 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1)}{2}, \\ T_3 &= \frac{m_3 L_1^2 \dot{Q}_1^2 + m_3 L_2^2 \dot{Q}_2^2 + (J_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3^2 + 2m_3 L_1 L_2 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1)}{2} + \\ &+ \frac{2m_3 L_1 L_3 \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2m_3 L_2 S_3 \dot{Q}_2 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2)}{2}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Полученные уравнения определяют величину кинетической энергии звеньев тела человека и для численного решения в правых частях уравнений достаточно знать количественные значения динамических характеристик звеньев тела и обобщенных координат. Так как кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий отдельных тел, то можно записать

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T - кинетическая энергия трехзвенной биомеханической системы.

Не прибегая к подробным выкладкам, запишем уравнение кинетической энергии в окончательном виде:

$$T = \frac{(J_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2) \dot{Q}_1^2 + (J_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2) \dot{Q}_2^2 + (J_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3^2}{2} +$$

$$+ \frac{2(m_2 L_1 S_2 + m_3 L_1 L_2) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + 2m_3 L_1 S_3 \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1)}{2} +$$

$$+ \frac{2m_3 L_2 S_3 \dot{Q}_2 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2)}{2}.$$

Обозначим через коэффициенты A_{ij} масс-инерционные характеристики звеньев тела

$$A_{11} = J_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2,$$

$$A_{22} = J_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2,$$

$$A_{33} = J_3 + m_3 S_3^2,$$

$$A_{12} = m_2 L_1 S_2 + m_3 L_1 L_2,$$

$$A_{13} = m_3 L_1 S_3,$$

$$A_{23} = m_3 L_2 S_3.$$

В этом случае выражение кинетической энергии для трехзвенной биомеханической системы можно записать в следующей форме:

$$T = \frac{A_{11} \dot{Q}_1^2 + A_{22} \dot{Q}_2^2 + A_{33} \dot{Q}_3^2 + 2A_{12} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1)}{2} +$$

$$+ \frac{2A_{13} \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2A_{23} \dot{Q}_2 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2)}{2}. \quad (4.79)$$

Для N -звенной биомеханической системы кинетическая энергия в компактной записи имеет вид

$$T = \frac{\sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i)}{2}, \quad (4.80)$$

а для i -го звена, в виде удобном для программирования на ЭВМ, получим

$$T_i = \frac{[(J_i + m_i S_i^2) \dot{Q}_i^2]}{2} + \frac{m_i \sum_{k=1}^{i-1} (L_k^2 \dot{Q}_k^2)}{2} +$$

$$+ m_i \sum_{k=1}^{i-1} L_k S_i \dot{Q}_i \dot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) + m_i \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} L_k L_j \dot{Q}_k \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_k). \quad (4.81)$$

Уравнения (4.80), (4.81) позволяют написать выражение кинетической энергии звеньев тела и биомеханической системы для N -звенной модели, состоящей практически из любого количества звеньев, в развернутом виде. Это позволяет, не зная явный вид уравнений кинетической энергии,

тической энергии i -го звена, вычислять искомые значения, по стандартной программе, составленной для алгоритмов (4.80), (4.81).

2. *Потенциальная энергия* – энергия покоя. Потенциальная энергия (Π) определяется произведением веса тела (P) и расстоянием до опоры (H) по вертикали

$$\Pi = PH. \quad (4.82)$$

Потенциальная энергия может переходить в кинетическую энергию, что объясняет увеличение скорости движущегося тела во вращательном движении в условиях опоры (при перемещении из опорного положения в вис).

3. *Кинетический момент* – мера вращательного движения тела. Кинетический момент (K) измеряется произведением момента инерции тела (J) и угловой скорости ($\dot{\varphi}$)

$$K = J\dot{\varphi}. \quad (4.83)$$

Момент инерции определяется относительно оси вращения. Поэтому:

- осью вращения тела в условиях опоры является место контакта тела с опорой;
- в безопорном положении осью вращения тела является общий центр масс тела.

В полетной части упражнения кинетический момент – величина постоянная. Применительно к биомеханической системе это означает, что любые сгибательно-разгибательные движения спортсмена в суставах в полетной части упражнения, изменяющие конфигурацию биосистемы, не способны изменить величину его кинетического момента относительно оси вращения проходящей через общий центр масс биомеханической системы.

4. *Количество движения* – мера поступательного движения тела. Количество движения (Q) определяется произведением массы тела (m) и его линейной скорости (ϑ)

$$Q = m\vartheta. \quad (4.84)$$

Количество движения – аналог кинетического момента в поступательном движении. Если во вращательном движении меру инертности тела характеризу-

ет момент инерции (J), то в поступательном движении – масса (m). И, если во вращательном движении кинетический момент определяется как произведение момента инерции тела на его *угловую* скорость, то в поступательном движении количество движения зависит от величины *линейной* скорости.

Контрольные вопросы

1. С помощью каких характеристик описывают механическое состояние и двигательные функции тела человека?

2. Чем кинематические характеристики движений отличаются от динамических?

3. К какой подгруппе относятся пространственные, временные и пространственно-временные характеристики и что их объединяет?

4. Что представляют собой динамические коэффициенты, используемые в уравнениях движения человека?

5. Какие аналитические методы позволяют определить геометрию масс тела человека?

6. Как с помощью весовых и относительных коэффициентов определяются масс-инерционные характеристики сегментов тела человека?

7. По каким формулам определяется центр тяжести системы тел, в частности, ноги?

8. В чем заключается сущность определения центрального момента инерции сегментов тела человека с использованием уравнений множественной регрессии?

9. В чем математически заключается отличие центрального момента инерции сегмента тела человека от момента инерции относительно оси проходящей через любой из суставов, ограничивающих рассматриваемый сегмент и рассматриваемый в той же плоскости, что и центральный момент инерции?

10. Каким образом можно определить центральный момент инерции звена, состоящего из нескольких сегментов?

11. Какие характеристики движений включает в себя каждая из подгрупп кинематических характеристик?

12. По каким формульным зависимостям определяются координаты суставов трехзвенной биомеханической системы с использованием значений длины и угла наклона каждого звена к оси абсцисс (координаты системы тел)?

13. Каким образом определяются временные характеристики движений по материалам оптической регистрации упражнений?
14. Каким образом можно получить численные значения линейной скорости точки по материалам оптической регистрации движений?
15. Каким образом можно получить численные значения угловой скорости сегмента (звена) по материалам оптической регистрации движений?
16. Каким образом можно получить численные значения линейного ускорения точки по материалам оптической регистрации движений?
17. Каким образом можно получить численные значения углового ускорения сегмента (звена) по материалам оптической регистрации движений?
18. На какие три большие группы подразделяются динамические характеристики движений, и что включает в себя каждая из групп?
19. В чем различие между понятием «сила» и «момент силы»?
20. Какими показателями определяется кинетическая и потенциальная энергии тела (формульное выражение)?
21. Что определяет меру вращательного движения тела в его поступательном и вращательном движении (дать формульные выражения)?

5. МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯМИ СПОРТСМЕНА

5.1. Безопорное состояние

5.1.1. Биомеханика сгибательно-разгибательных движений спортсмена в суставах в безопорном состоянии при отсутствии начального вращательного импульса

Изменение позы спортсмена в полетной части упражнения может привести к различным последствиям, которые определяются величиной начального вращательного импульса. Под начальным вращательным импульсом понимается величина кинетического момента (K) биомеханической системы, который для тела в безопорном состоянии определяется зависимостью

$$K = J\dot{\phi} . \quad (5.1)$$

Здесь J – величина момента инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; $\dot{\phi}$ – угловая скорость тела.

Для биомеханической системы величина кинетического момента определяется суммой кинетических моментов его отдельных звеньев. Например, для трехзвенной модели биомеханической системы (в которой руки – первое звено, туловище с головой – второе звено, ноги – третье звено) кинетический момент всей системы (K) равен

$$K = K_1 + K_2 + K_3. \quad (5.2)$$

Следует помнить, что в полетной части упражнения *осью вращения является ось, проходящая через общий центр масс биомеханической системы.*

Рассмотрим следующий пример: батутист совершает прыжки на батуте.

В крайней верхней точке вылета вверх спортсмен, по заданию тренера, должен выполнить двигательное задание: совершить сгибание ног в тазобедренных суставах до угла между ногами и туловищем в 90° . Необходимо определить: в каком положении окажутся звенья тела спортсмена после выполнения поставленного двигательного задания?

При решении данной задачи будем исходить из следующего положения: *в полетной части упражнения величина кинетического момента биомеханической системы не изменяется*. Сущность данного положения сводится к тому, что в безпорном состоянии величина кинетического момента тела спортсмена является *константой* и определяется начальными условиями движения.

За основу возьмем несколько возможных конечных положения звеньев тела спортсмена, являющихся результатом решения поставленной двигательной задачи:

1. Предположим, что в конечном положении руки и туловище батутиста остаются на месте, занимая вертикальное положение, а ноги принимают горизонтальное положение (рис. 5.1, II). Возможно также и вращательное движение всей биомеханической системы по сальто назад (рис. 5.1, III).

2. Аналогично, ноги в конечном положении остаются на месте, а туловище и руки, вращаясь вперед, приходят в горизонтальное положение (рис. 5.1, IV). Можно также рассматривать и вращательное движение спортсмена по сальто вперед (рис. 5.1, V).

3. Руки и туловище совершают поворот навстречу движению ног и в конечном положении и ноги и туловище с руками отклоняются от исходного вертикального положения на 45° (рис. 5.1, VI).

Биомеханический анализ возможных положений построим на законе сохранения кинетического момента биомеханической системы в полетной части упражнений. Заметим, что в исходном положении, перед началом выполнения двигательного задания все звенья тела имели нулевую угловую скорость. Поэтому, *исходный кинетический момент биосистемы был равен нулю*.

Первое конечное положение (рис. 5.1, II) для нас неприемлемо, так в этом случае, в результате вращения ног, ноги приобретают вращательный импульс, и кинетический момент всей биосистемы не будет равен нулю (первоначально имеющемуся). Тем более, биомеханически необоснованным является вращение спортсмена по сальто назад (рис. 5.1, III), так как в этом случае вращательный

импульс приобретают все звенья тела спортсмена – закон сохранения кинетического момента нарушается.

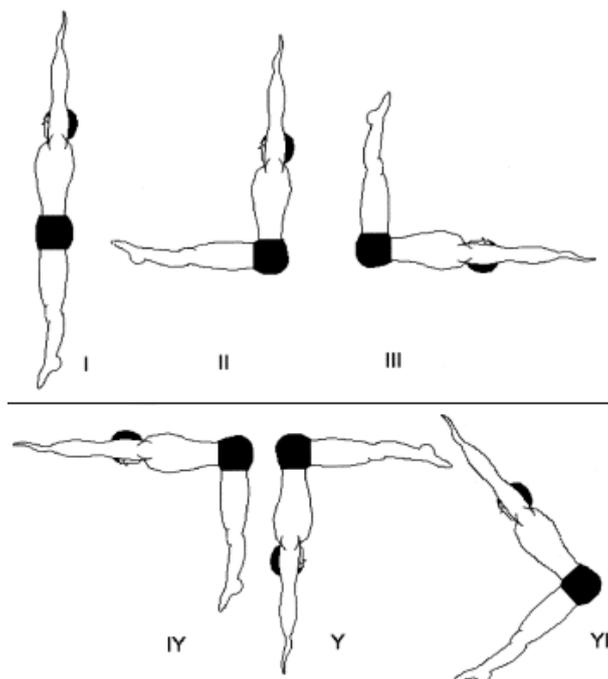


Рис. 5.1. Возможные положения батутиста после выполнения двигательного задания

По этим же соображениям неприемлемым являются четвертое и пятое конечные положения батутиста (рис. 5.1, IV, V), так как в результате вращения туловища и рук они приобретают определенную величину кинетического момента, и кинетический момент всей биомеханической системы в конечном положении будет отличаться от нуля.

Реальному движению будет соответствовать шестое анализируемое положение (рис. 5.1, VI). Действительно, при движении туловища и рук навстречу ногам, как ноги, так и туловище с руками приобретают определенную величину кинетического момента. Но, учитывая, что кинетический момент – векторная величина (имеет модуль и направление), то алгебраическая сумма положительного и отрицательного значения кинетического моментов ног и туловища с руками останется по-прежнему равной нулю. Закон сохранения кинетического момента не нарушен.

В заключение остается отметить, что угол поворота звеньев тела спортсмена будет определяться величиной их момента инерции: чем больше момент инерции, тем на меньший угол совершается поворот. Например, допустим, что

при выполнении вышерассмотренного двигательного задания, момент инерции туловища, головы и рук в два раза больше момента инерции ног спортсмена. В этом случае первая биокинематическая цепь совершает поворот на 30° , а ноги – на 60° . И, наоборот: если момент инерции ног в два раза больше момента инерции туловища, головы и рук, то в этом случае ноги совершают поворот на 30° , а туловище, голова и руки – на 60° .

Следовательно, для рассматриваемой биомеханической закономерности зависимость *обратная: во сколько раз момент инерции туловища, головы и рук больше момента инерции ног во столько раз меньше* и угол поворота первой биокинематической цепи по отношению к ногам. И наоборот.

Таким образом, при выполнении спортсменом сгибательных движений в суставах в полетной части упражнений звенья тела совершают *противонаправленные повороты на величину угла, определяемого обратной зависимостью соотношения их моментов инерции*.

Данную закономерность следует учитывать в педагогическом процессе. Например, допустим, что тренер при объяснении техники сальто назад с места в группировке поясняет занимающемуся, что для выполнения упражнения необходимо выпрыгнуть как можно выше вверх и в крайнем верхнем положении резко подтянуть ноги к плечам. Несомненно, данная трактовка техники выполнения упражнения является методической ошибкой, так как не только ноги будут совершать вращение к плечам, но и плечи, в свою очередь будут двигаться к ногам.

5.1.2. Механизмы управления скоростью вращения звеньев тела спортсмена в полетной части упражнения при наличии начального вращательного импульса

Если спортсмен обладает определенным запасом кинетического момента в полетной части упражнения, то сгибательно-разгибательные движения в суставах влияют на величину изменения угловой скорости биомеханической системы. При анализе этого явления будем исходить из того факта, что в положении группировки момент инерции тела спортсмена относительно оси вращения, ка-

кой является ОЦМ тела спортсмена примерно в 4 раза меньше, чем в положении «стойка – руки вверх», когда звенья тела расположены на одной прямой.

Примем, условно, что момент инерции тела спортсмена в выпрямленном положении равен 1 единице. В этом случае момент инерции биомеханической системы в положении группировки равен 0,25 единиц. Рассмотрим на примере упражнения «сальто назад в группировке» в акробатике изменение величины угловой скорости биомеханической системы после принятия спортсменом группировки в полетной части упражнения.

Допустим, в момент отталкивания на сальто угловая скорость звеньев тела составляла 6 рад/с. Отход на сальто выполнялся выпрямленным телом, в положении руки вверх. Тогда, в соответствии, с формулой 5.1, кинетический момент тела спортсмена (K), как произведение момента инерции (J) на угловую скорость ($\dot{\phi}$), равен

$$K = J\dot{\phi} = 1 \cdot 6 = 6 \text{ (единиц)}.$$

В полете, после принятия группировки, момент инерции тела спортсмена уменьшится примерно в 4 раза и станет равен 0,25 единицы, относительно исходной величины момента инерции. В то же время, в соответствии с законом сохранения величины кинетического момента тела в полетной части упражнения, величина вращательного импульса останется прежней (6 единиц). Отсюда следует, что угловая скорость должна увеличиться в 4 раза, чтобы кинетический момент оставался равным 6-ти единицам.

Таким образом, во сколько раз *уменьшится момент инерции* тела, во столько раз *увеличится угловая скорость*. И, наоборот – во сколько раз увеличится момент инерции тела, во столько раз уменьшится угловая скорость.

Следовательно, при принятии группировки угловая скорость тела в полетной части упражнения увеличивается, при разгруппировке – уменьшается. Эта биомеханическая закономерность позволяет спортсмену регулировать скорость вращательного движения в полетной части упражнений, что очень важно, например, при выполнении акробатических упражнений, прыжках на батуте, в соскоковых упражнениях с многократными вращениями в спортивной гимнастике и т.п. Например, если при выполнении двойного сальто назад в группировке в соскок с перекладины гимнаст выполняет «недокрут» по сальто, то ему необходимо плотнее сгруппироваться, что позволит увеличить угловую ско-

рость тела. В то же время, если наблюдается «перекрут» по сальто, то гимнасту необходимо раньше выполнить разгибание до выпрямленного положения тела, что обеспечивает уменьшение угловой скорости и правильное приземление.

5.1.3. Биомеханика перемещения общего центра масс тела спортсмена в полетной части упражнения

Траектория общего центра масс тела спортсмена в полетной части упражнения (безопорное состояние) определяется двумя факторами:

1. Величиной начальной скорости (V_0) вылета ОЦМ.
2. Углом (Q) вылета ОЦМ.

Траектория ОЦМ тела спортсмена в безопорном состоянии является параболой (рис. 5.2).

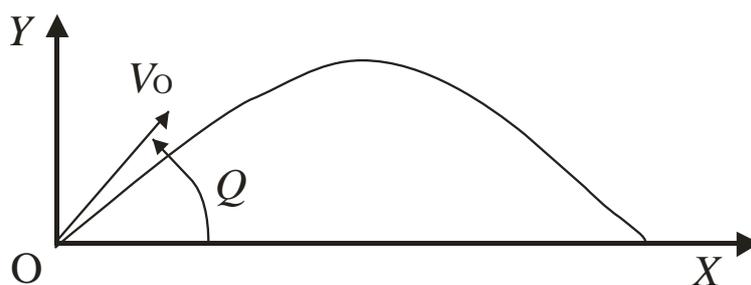


Рис. 5.2. Траектория ОЦМ тела спортсмена в полетной части упражнения

Если взять составляющие начальной скорости по осям Ox и Oy , то они (V_x , V_y) будут определяться из простых геометрических построений (проекциями V_0 на оси декартовой системы координат)

$$V_x = V_0 \cos Q, \quad V_y = V_0 \sin Q.$$

Считая, что в безопорном состоянии на тело спортсмена не действуют никакие силы, кроме силы тяжести, для траектории ОЦМ можно записать следующие уравнения движения по оси Ox (X) и по оси Oy (Y):

$$X = V_x t = V_{0t} \cos Q, \quad Y = V_y t - \frac{gt^2}{2} = V_{0t} \sin Q - \frac{gt^2}{2}. \quad (5.3)$$

Здесь t – время, g – ускорение свободного падения ($9,806 \text{ м/с}^2$).

В полетной части упражнения никакие сгибательно-разгибательные движения в суставах спортсмена не в состоянии изменить траектории ОЦМ тела спортсмена. Сгибательно-разгибательные движения в суставах спортсмена влияют только на изменение его позы и при условии наличия начального вращательного импульса – на угловую скорость звеньев тела.

5.2. Опорное положение

5.2.1. Механизмы управления движениями спортсмена в условиях опоры за счет изменения величины внешних моментов сил

Сознательным волевым усилием человек не способен управлять и изменять величину внешних сил. Изменяя величину силы тяги мышц (внутренние силы), спортсмен изменяет конфигурацию биосистемы, взаимное расположение звеньев опорно-двигательного аппарата, что и является причиной изменения величины действия внешних моментов сил (рис. 5.3).

Например, изменяя конфигурацию биомеханической системы, можно управлять величиной момента силы тяжести, так как в этом случае будет изменяться количественное значение величины плеча силы.

Рассмотрим эту закономерность на примере выполнения большого оборота назад на перекладине. В первой части упражнения, при движении спортсмена от вертикального положения над опорой до вертикального положения под опорой, момент силы тяжести является *разгоняющей* силой. Поэтому, с целью максимального увеличения положительного действия момента силы тяжести, ОЦМ тела спортсмена на всей траектории движения должен быть максимально удален от оси вращения (гриф перекладины). Для этого, в первой части упражнения, гимнаст сохраняет выпрямленное положение тела: *звенья тела располагаются на одной прямой*.

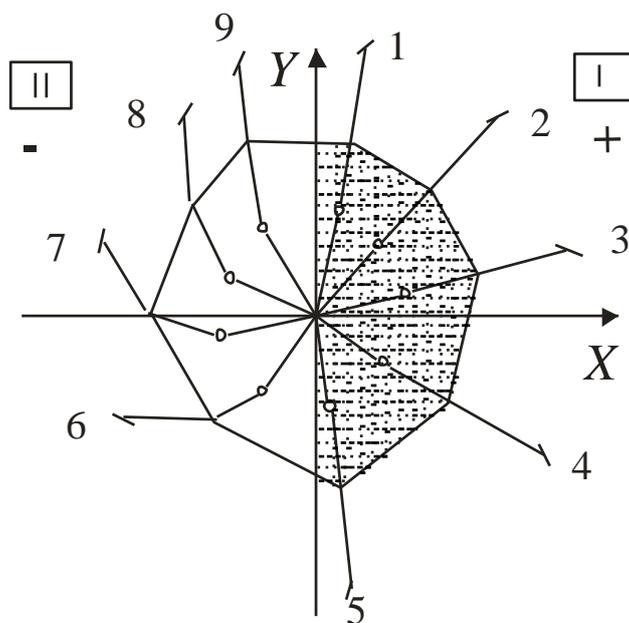


Рис. 5.3. Управление движением за счет изменения величины внешних моментов сил (момент силы тяжести)

Во второй половине оборота, момент силы тяжести является *тормозящей* силой, уменьшающей угловую скорость звеньев тела спортсмена. С целью уменьшения отрицательного воздействия момента силы тяжести, в этой части упражнения необходимо приблизить ОЦМ тела спортсмена к опорной вертикали. Для этого гимнаст выполняет сгибательные движения рук в плечевых и ног в тазобедренных суставах, что приводит к приближению ОЦМ биомеханической системы к оси вращения.

В первой части упражнения положительная работа момента силы тяжести (площадь правой полуокружности) больше, чем отрицательная работа момента силы тяжести (площадь левой полуокружности) во второй части упражнения. За счет *разности, положительной работы момента силы тяжести* в первой половине упражнения и *отрицательной работы момента силы тяжести* во второй части упражнения и сохраняется приобретенная скорость звеньев тела спортсмена.

Выполнение размахиваний в висе на кольцах также основывается на возможности увеличения разгоняющего действия момента силы тяжести (рис. 5.4).

Из трех, приведенных на рисунке 5.4, конечных положений спортсмена на махе вперед на кольцах, наиболее рациональным является третье положение, когда руки, туловище и ноги гимнаста располагаются на одной прямой. В этом

случае, разгоняющее действие момента силы тяжести будет наибольшим. Наибольшим момент силы тяжести будет в связи с максимально возможным увеличением плеча силы тяжести, которое регулируется позой спортсмена или, иначе говоря, конфигурацией биомеханической системы.

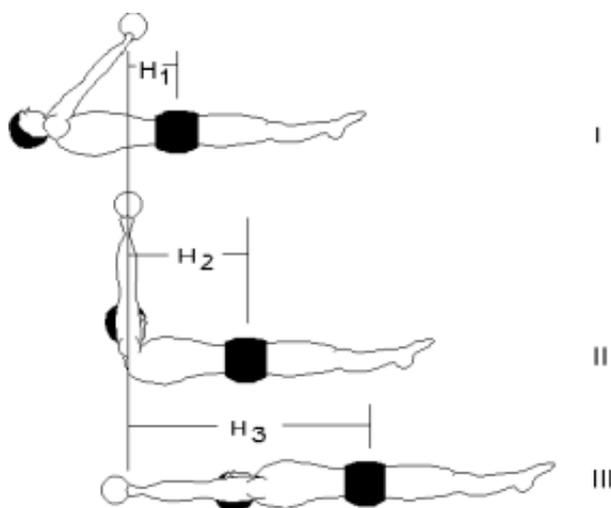


Рис. 5.4. Изменение величины разгоняющего действия момента силы тяжести при выполнении размахиваний в висе на кольцах

Положения I, II – примеры типичной двигательной ошибки.

5.2.2. Механизмы управления движениями спортсмена в условиях опоры с использованием кориолисовой силы инерции

Во вращательных движениях спортсмена существует своеобразная закономерность – действие кориолисовой силы инерции, механизм проявления которой можно рассмотреть на примере вращения стержня (рис. 5.5).

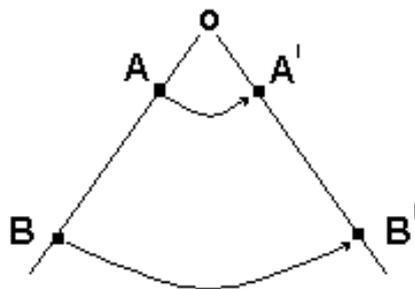


Рис. 5.5. Механизм проявления кориолисовой силы инерции во вращательных движениях в условиях опоры

Допустим, точка **O** является точкой подвеса стержня и из крайнего левого положения стержень совершает колебательное движение в крайнее правое положение. Выберем на стержне две точки: точку **A**, которая расположена ближе к оси вращения, и более удаленную от оси вращения точку **B**.

Так как точка **B** более удалена от оси вращения, то и пройденный ею путь будет больше, чем у точки **A**. Время движения для рассматриваемых двух точек одно и то же. Отсюда следует, что линейная скорость точки **B** будет *больше* линейной скорости точки **A**.

Мысленно переместим, в процессе вращения, точку **B** в направлении к оси вращения и совместим ее с точкой **A**. Точка **B**, по первому закону Ньютона, передаст часть своей скорости точке **A** и будет увлекать ее в своем вращении. В этом и проявляется действие кориолисовой силы инерции в соревновательных упражнениях: *перемещение звеньев тела вдоль радиуса вращения к оси вращения увеличивает угловую скорость биомеханической системы.*

Например, выполняется размахивание в висе на перекладине. Сгибательно-разгибательные движения спортсмена выполняются в двух суставах: плечевых и тазобедренных. Для описания движения звеньев тела спортсмена можно воспользоваться трехзвенной моделью биомеханической системы: руки, туловище с головой – первое звено, ноги – второе. Ноги наиболее удалены от оси вращения, и их центр масс имеет большую скорость, чем центр масс туловища и рук. После прохождения вертикального положения под опорой гимнаст выполняет сгибательное движение ног в тазобедренных суставах. Центр масс ног приближается к оси вращения (гриф перекладины) и передает часть своей скорости туловищу.

Сгибательное движение рук в плечевых суставах, в соответствии с выше-рассмотренным механизмом проявления кориолисовой силы инерции, увеличит угловую скорость рук.

В целом, *сгибательные движения, выполняемые в дистальных суставах, приводят к увеличению скорости проксимальных звеньев. Разгибательные движения в дистальных звеньях – уменьшают скорость проксимальных звеньев.*

5.2.3. Закон сохранения количества движения (передача количества движения с одного звена тела на другое)

Закон передачи количества движения с одного звена тела на другое проявляется в поступательных движениях. Количество движения (Q) определяется произведением массы тела и линейной скорости его центра масс

$$Q = m \cdot v. \quad (5.4)$$

Рассмотрим следующий пример. Из размахивания в упоре на руках на брусьях гимнаст выполняет: махом вперед – упор на руках согнувшись – подъем разгибом в упор.

Допустим, масса ног спортсмена составляла 10 единиц. В момент разгибания центр масс ног приобрел скорость – 6 м/с. Количество движения составляет $10 \cdot 6 = 60$ единиц. Не доходя, примерно, 30° до горизонтального положения, гимнаст осуществляет резкое торможение ног до нулевой скорости и, только после этого, выполняет рывковое движение руками для подъема в упор. Количество движения ног стало равным нулю. Куда исчезли, ранее приобретенные 60 единиц количества движения ног? Они передались туловищу, в результате чего выполнение подъема гимнаста в упор происходит с меньшими мышечными усилиями, легко и непринужденно.

Аналогичный механизм передачи количества движения с одного звена тела на другое проявляется и во многих других гимнастических упражнениях (структурные группы движений подъемов разгибом, махом вперед и назад, перелеты, соскоки и др.). Например, рассмотрим выполнение подъема махом вперед в упор из размахивания в висе на кольцах. На махе вперед, гимнаст акцентированным бросковым движением посылает ноги вперед-вверх, приобретая

определенное количество движения. Затем следует торможение ног и, только после этого, рывковое движение руками. После торможения ног, приобретенное ими количество движения передается туловищу, увеличивая его скорость, что позволяет легко и красиво выполнить подъем махом вперед в упор.

Таким образом, основой техники упражнений, выполняемых с использованием механизма передачи количества движения с одного звена тела на другое, является *акцентированное увеличение скорости дистальных звеньев тела спортсмена с последующим резким торможением их практически до нулевой скорости, с фиксацией угла между звеньями тела. И только после выполненного торможения в активную работу включаются проксимальные звенья.* Типичной технической ошибкой выполнения рассматриваемой структурной группы упражнений является *активная одновременная работа дистальных и проксимальных звеньев тела спортсмена.* В этом случае действие закона о передаче количества движения с одного звена тела на другое не проявляется, и упражнение выполняется в лучшем случае с излишними и большими мышечными напряжениями, а чаще всего и вовсе не выполняется.

Контрольные вопросы

1. В каком положении окажутся звенья тела спортсмена после сгибания ног в тазобедренных суставах в безопорном состоянии при отсутствии начального вращательного импульса (кинетический момент системы равен нулю – на примере батутиста, совершающего прыжок вверх)?

2. Влияют ли сгибательно-разгибательные движения в суставах спортсмена на величину изменения угловой скорости биомеханической системы в полетной части упражнения при наличии начального вращательного импульса, и на каком законе механике это основывается?

3. На каком законе основан механизм изменения угловой скорости биомеханической системы в полетной части упражнения?

4. От каких начальных условий зависит траектория общего центра тяжести тела спортсмена в полетной части упражнения и можно ли ее изменить с помощью внутренних сил (силы тяги мышц)?

5. Можно ли изменять величину внешних сил за счет изменения конфигурации биосистемы?

6. Можно ли изменять величину момента внешних сил за счет изменения конфигурации биосистемы?

7. Способен ли спортсмен во вращательном движении в условиях опоры управлять изменением величины момента силы тяжести, и, если да, то, как проявляется этот механизм регулирования?

8. В каких движениях спортсмена проявляется действие кориолисовой силы инерции и в чем ее смысл?

9. В каких движениях спортсмена проявляется закон сохранения количества движения и в чем его смысл?

6. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

6.1. Моделирование – один из методов научного познания

Моделирование – один из древнейших методов научного познания, широко применяющийся в архитектуре, скульптуре, технике. И, пожалуй, в настоящее время трудно назвать ту область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы машинных экспериментов с моделями сложных систем. Особенно актуальны проблемы моделирования в сфере управления различными системами, основанными на процессах принятия решений.

В то же время, несмотря на интенсивное развитие используемых в моделировании средств и методов, некоторые частные вопросы методологии моделирования еще ждут своей разработки. Действительно, уже в самом начале анализа метода моделирования мы встречаемся с тем, что в науке пока не существует общепринятого определения понятия «модель». Например, в Советском энциклопедическом словаре (1981) дано 7 определений модели, включающих в себя и определение модели в широком смысле (с.828): «модель – любой образ (мысленный или условный: изображение, описание, схема, чертеж, график, план, карта и т.п.) к.-л. объекта, процесса или явления ("оригинала" данной м.), используемый в качестве его "заместителя", "представителя"».

Предлагаемое определение модели обладает некоторой неопределенностью, в частности, не очень ясны функции модели, на что ориентирована модель в научно-исследовательских целях и т.д. Одно из наиболее лучших определений принадлежит Б.А. Штоффу (1966): *«под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте»* (с. 93).

Следовательно, одна из важнейших функций модели заключается в получении новой информации об объекте исследования. Причем, эту информацию

получают, *изучая не сам объект познания, а его модель*, которая может быть мысленной или материально реализованной. Таким образом, при моделировании между исследователем и изучаемым объектом или процессом ставится некоторое промежуточное звено – модель, т.е. моделирование, есть особая форма опосредования.

Логической основой различных видов моделирования является теория подобия, согласно которой два явления подобны, если по заданным характеристикам одного явления можно получить характеристики другого. В соответствии с этим наиболее широкое распространение получило определение моделирования, сформулированное И.Б. Новиком (1965).

Автор рассматривает моделирование как метод практического или теоретического опосредованного оперирования объектом, в ходе которого исследуется непосредственно не сам интересующий нас объект, а некоторая промежуточная вспомогательная система (естественная или искусственная), которая:

а) находится в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

б) обладает возможностью на известных этапах исследования замещать в определенных отношениях изучаемый объект;

в) реализует необходимость давать в процессе исследования качественную и количественную информацию об интересующем нас объекте.

Сама эта промежуточная вспомогательная система (модель) может выступать в виде естественной, искусственной, знаковой системы.

В качестве основных, характерных черт модели предложено считать:

1. *Объективное соответствие с моделируемым объектом.*

2. *Способность замещать познаваемый объект на определенных этапах исследования.*

3. *Возможность давать в ходе исследования необходимую информацию, допускающую опытную проверку.*

4. *Наличие четких правил перехода от модельной информации к информации о самом моделируемом объекте.*

Как уже отмечалось, в основе моделирования лежит *теория подобия*, утверждающая, что абсолютное подобие возможно лишь при замене одного моделируемого объекта другим точно таким же. Так как абсолютного подобия достичь практически невозможно, то в исследованиях обычно стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо и полно отражала исследуемую область

функционирования моделируемого объекта или процесса. Поэтому в качестве одного из признаков классификации моделей и моделирования можно выбрать признак полноты модели и в соответствии с ним выделить следующий класс моделей: *полные, неполные, приближенные*.

Классификация моделей на полные, неполные и приближенные не несет той методологической нагрузки, которая позволила бы определить общую направленность моделируемого процесса в плане его содержательной и конструктивной сущности. По мере конкретизации модели она из приближенной приобретает черты неполной и в окончательном варианте формируется в полную модель, описывая один и тот же моделируемый процесс. А это – конструктивные этапы построения модели, раскрывающие последовательность получения более полной информации об объекте исследования.

Существенно большей классификационной общностью обладает способ дифференцирования моделей, предложенный Б.Я. Советовым и С.А.Яковлевым (1985) (рис. 6.1). По мнению авторов, модели можно классифицировать в зависимости от *условий, характера* изучаемых процессов в моделируемой системе и *формы представления* объектов моделирования. Предлагаемая классификация достаточно логично и системно объединяет различные виды моделирования и охватывает широкий спектр моделируемых процессов, объектов и явлений.

По *условиям и характеру* изучаемых процессов в системе, авторы классификационной схемы (см. рис. 6.1), выделяют следующие *виды моделирования*:

1. *Детерминированное моделирование* – отображает причинно-следственные связи и процессы, в которых отсутствуют любые случайные воздействия.

2. *Стохастическое моделирование* – отображает вероятностные процессы и события.

3. *Статическое моделирование* – описывает поведение объекта в какой-либо момент времени.

4. *Динамическое моделирование* – отражает эволюцию исследуемого объекта во времени.

5. *Дискретное моделирование* – служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными.

6. *Непрерывное моделирование* – отражает непрерывные процессы в системах.

7. *Дискретно-непрерывное моделирование* – используется для описания

дискретных и непрерывных процессов в изучаемой системе.

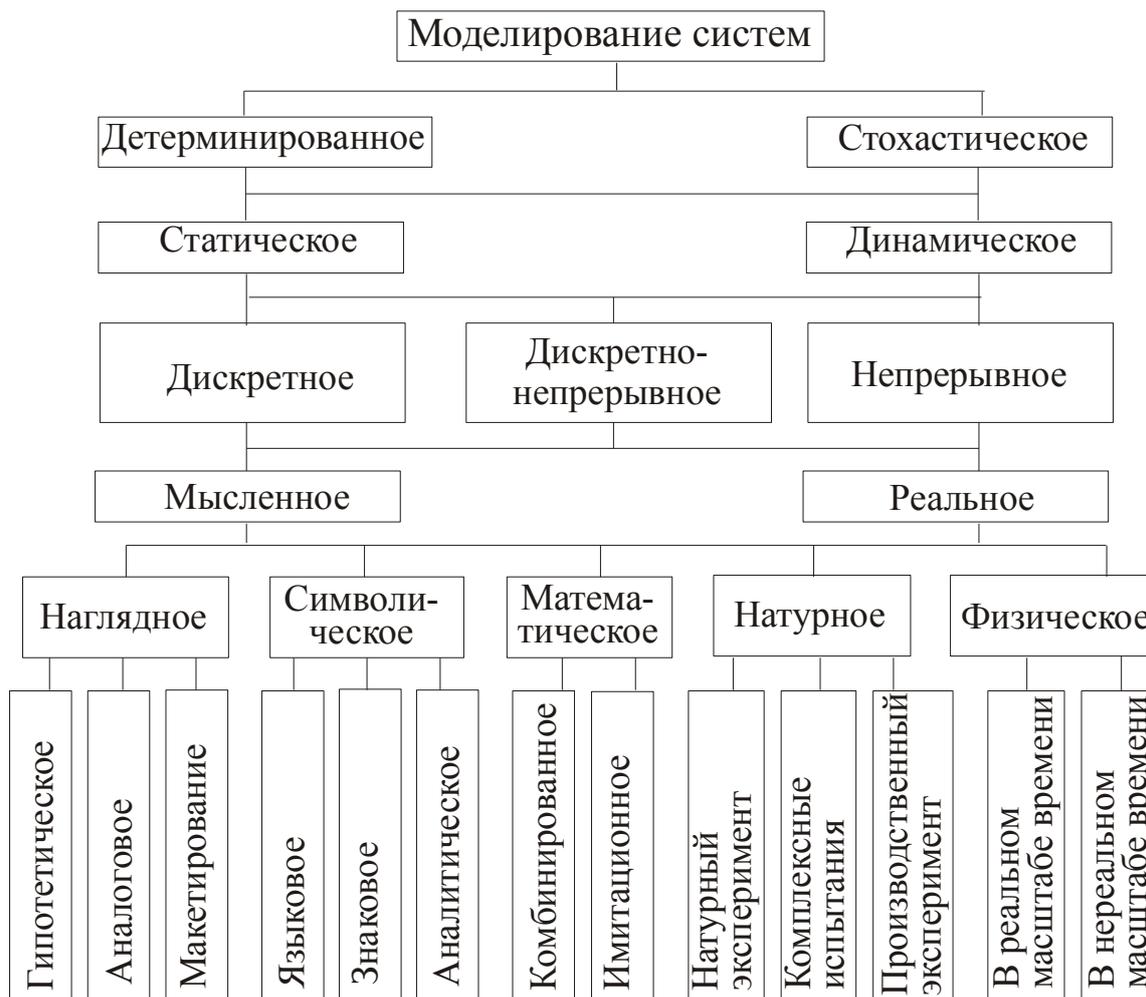


Рис. 6.1. Классификация видов моделирования
[по Советову Б.Я., Яковлеву С.А. (1985)]

В зависимости от *формы* представления моделируемого объекта выделяют два вида моделирования:

1. *Мысленное моделирование* – применяется к объектам, существующим вне условий их физического создания или не реализуемых в заданных интервалах времени.

2. *Реальное моделирование* – используется возможность исследования различных характеристик функционирования системы или на реальном объекте, или на его части.

Мысленное моделирование реализуется в трех формах его проявления:

1. *Наглядное моделирование* – осуществляется на базе представлений человека о реальных объектах в форме наглядных моделей, отображающих явления

и процессы, протекающие в исследуемой системе, и включает в себя три вида моделирования – *гипотетическое, аналоговое и макетирование*:

– *гипотетическое моделирование* – исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях функционирования исследуемого реального объекта, базирующаяся на знании причинно-следственных связей изучаемой системы на входе и выходе;

– *аналоговое моделирование* – основывается на использовании аналогий различного уровня, отражающих соответственно только одну или несколько сторон функционирования моделируемой системы;

– *макетирование* – в основе создания мысленных макетов также лежат аналогии, базирующиеся на причинно-следственных связях процессов и явлений моделируемой системы.

2. *Символическое моделирование* – основано на условном обозначении отдельных понятий:

– *знаковое моделирование* – с помощью условных обозначений отдельных понятий (знаков) и аппарата теории множеств составляются цепочки слов и предложений;

– *языковое моделирование* – в основе лежит некоторый тезаурус предметной области исследования, исключающий неоднозначность понятий.

3. *Математическое моделирование* – процесс установления соответствия реальному объекту математического объекта, называемого математической моделью. Выделяют три вида математического моделирования:

– *аналитическое моделирование* – процессы функционирования элементов системы и системы в целом записываются в форме функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных);

– *имитационное моделирование* – моделирующий алгоритм воспроизводит процесс функционирования исследуемой системы во времени, что позволяет по исходным данным получать информацию о состоянии процесса в определенные моменты времени. В настоящее время имитационное моделирование – наиболее эффективный, а часто и единственный, практически доступный метод исследования больших систем. Имитационное моделирование на ЭВМ положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, которые являются оптимальными по некоторым критериям оценки эффективности;

– *комбинированное моделирование* – (аналитико-имитационное) объединяет достоинства аналитического и имитационного моделирования.

Реальное моделирование объединяет два вида моделирования:

1. *Натурное моделирование* – проведение исследований на реальном объекте для выявления закономерностей протекания реального процесса. Существует три разновидности натурного моделирования: *научный эксперимент, комплексные испытания, производственный эксперимент*:

– *научный эксперимент* – широкое использование средств автоматизации проведения эксперимента с возможностью вмешательства исследователя в процесс исследования;

– *комплексные испытания* – выявление общих закономерностей надежности промышленных изделий методом повторения испытаний;

– *производственный эксперимент* – обобщение опыта, накопленного в ходе производственного процесса с использованием статистического материала.

2. *Физическое моделирование* – в отличие от натурного осуществляется на специальных установках, воспроизводящих природу явлений в двух масштабах времени:

– *реальном*;

– *нереальном* – исследуются так называемые «замороженные» процессы, фиксируемые в некоторый момент времени.

Рассматривая модель в плане выполняемых ею функций, можно отметить, что для любой модели задачи исследования делятся на два класса: задачи *анализа* и *синтеза*. При этом под анализом понимается описание свойств элементов системы на основании информации об ее характеристиках в зависимости от определяющих параметров и структуры системы. Задача же синтеза заключается в получении информации об определяющих параметрах и (или) структуры системы по заданному набору требуемых свойств. То есть, в известном смысле, задача синтеза – задача обратная задаче анализа. В связи с этим конкретизируем задачи биомеханического исследования технических действий спортсмена в плане их единообразной постановки и трактовки с системных позиций.

Во-первых, среди обширного круга задач по биомеханике технических действий спортсмена, можно отметить тематическую общность направленности биомеханических исследований: в виде исследований двигательных действий на кинематическом и динамическом уровнях.

Во-вторых, для каждой из групп задач кинематического или динамического уровней возможны две противоположные постановки задачи: обратная – задача анализа и прямая – задача синтеза. Следовательно, с достаточно большой степенью общности большинство задач биомеханики движений человека можно дифференцировать на четыре группы задач по двум типам и классам (рис. 6.2).

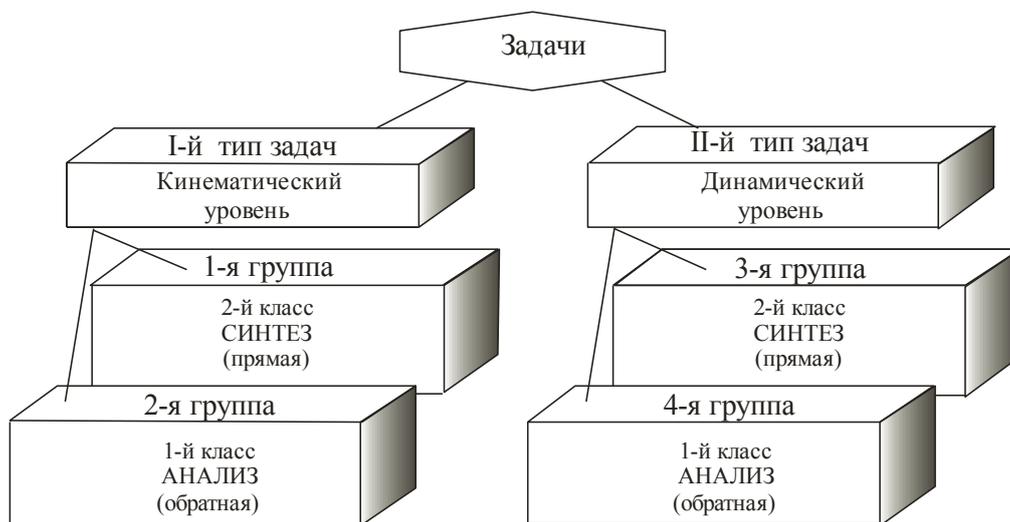


Рис. 6.2. Классификация задач биомеханики движений человека

Первый класс задач решается с помощью расчетных моделей анализа движений биомеханических систем, второй – с использованием математических моделей синтеза движений биомеханических систем.

6.2. Расчетные модели анализа и математические модели синтеза движений биомеханических систем

Применяя общепринятое понимание модели и моделирования к биомеханическим исследованиям техники упражнений в спорте, можно отметить следующее.

В процессе выполнения соревновательных упражнений изменяется биомеханическое состояние опорно-двигательного аппарата тела человека. Для количественной оценки этих изменений используют биомеханические характеристики движений. Они включают в себя две большие группы биомеханических показателей движения: *кинематические* и *динамические*. Кинематические характеристики движений раскрывают внешнюю эволюцию двигательных дей-

ствий, их геометрический рисунок в пространстве и во времени. *Кинематические характеристики* движений дифференцируются на три большие группы: *пространственные, временные, пространственно-временные* показатели двигательных действий, на основе которых выполняют кинематический анализ техники упражнений.

Кинематический анализ биомеханической системы состоит в определении движения звеньев тела человека по их известному движению. В качестве исходных данных обычно используют материалы оптической регистрации движений и промера. В лабораторных исследованиях привлекают и экспериментальные данные, полученные с использованием инструментальных методов регистрации движений.

Основные задачи кинематического анализа:

1. Определение положения звеньев биомеханической системы, включая и определение траекторий отдельных точек звеньев.
2. Определение скоростей и ускорений.
3. Определение временных характеристик движения и временной структуры сгибательно-разгибательных движений человека в суставах.

Кинематический анализ двигательных действий заключается, в частности, в определении положения звеньев тела человека в процессе выполнения упражнения, включая и определение траектории отдельных точек тела, например, суставов; линейных и угловых скоростей и ускорений отдельных точек и звеньев; времени выполнения отдельных фаз и всего упражнения в целом и т.п.

По своему содержанию кинематический анализ не объясняет причин возникновения и изменения движений. С этой целью используют *динамические характеристики* и выполняют динамический анализ техники упражнений. Динамический анализ заключается в определении *силовых, инерционных и энергетических характеристик* упражнений с последующим объяснением причин возникновения и изменения движения.

На каждом из этапов биомеханического исследования используют ряд понятий и абстракций, так как сложность реальных движений приводит к необходимости отвлечения от несущественных для изучаемого движения деталей. В биомеханике большое значение имеют такие основополагающие понятия, как материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный шарнир, идеальная связь, системы отсчета и ряд других.

Материальная точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. *Абсолютно твердое тело* – это система материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения. *Идеальный шарнир* – шарнир, в котором отсутствует сила трения. *Идеальная связь* – связь, для которой работа сил реакции при любом перемещении связанной системы равна нулю, или в физической интерпретации – связь, осуществляемая идеальными шарнирами.

Таким образом, основываясь на вышерассмотренном понятии модели и моделирования, можно считать, что биомеханическое исследование закономерностей двигательных действий включает в себя процесс замещения конкретного исполнителя моделью его опорно-двигательного аппарата. Это проявляется, во-первых, в том, что звенья тела человека представляют не во всей сложности их анатомо-физиологической структуры, а принимают за абсолютно твердые тела, аппроксимируемые в большинстве случаев стержнями, кинематическая связь между которыми осуществляется идеальными шарнирами различной конфигурации, моделирующими суставные поверхности звеньев тела человека. И, во-вторых, при исследовании техники соревновательных упражнений по материалам оптической регистрации движений *модель опорно-двигательного аппарата тела человека замещает реальное движение звеньев тела* в виде их последовательных по времени траекторных положений на промере, выраженных палочкообразными соединениями моделируемых суставов в соответствующем масштабе.

Результатом выполнения промера является кинематическая модель реального движения биомеханической системы, представленная в форме траекторных положений звеньев тела спортсмена в декартовой системе координат Oxy . Считанные координаты суставов и углы наклона звеньев биомеханической системы к оси Ox заносятся в специальную таблицу. Так как определение координат суставов и углов наклона звеньев тела спортсмена к оси Ox выполняется с некоторой погрешностью, то тем самым промер упражнения воспроизводит траекторию реального движения с определенной степенью соответствия. Следовательно, *промер*, как результат считывания координат движущегося объекта *представляет собой кинематическую модель траектории реального движения*.

Для получения информации о кинематических и биодинамических характеристиках исследуемого двигательного действия выполняют различные расчетные операции на основе формульных выражений, используя в качестве входных данных модель опорно-двигательного аппарата исполнителя и модель траектории исследуемого движения. Полученная информация используется в дальнейшем для анализа свойств биомеханической системы в рассматриваемом движении. Таким образом, можно считать, что *представленные в математической форме вычислительные алгоритмы для определения кинематических и динамических характеристик упражнений представляют собой расчетные модели анализа движений биомеханических систем.*

Так как биомеханический анализ движений выполняется на основе информации о кинематических и динамических характеристиках двигательных действий, то в каждом рассматриваемом случае используется конкретная расчетная модель анализа движений для количественного определения биомеханических характеристик: радиуса-вектора общего центра масс тела, момента инерции относительно оси, проходящей через ОЦМ тела спортсмена или опоры, кинетической энергии звеньев тела и системы в целом, горизонтальной и вертикальной составляющих силы реакции опоры и связи в суставах и т.п.

Ценность информации, получаемой при исследовании техники движений спортсмена на основе расчетных моделей анализа движений биомеханических систем, несомненна. В этом направлении выполнен широкий круг исследований и получены, обладающие теоретико-практической ценностью, результаты по многим вопросам построения рациональной техники упражнений в спорте. Однако решить задачу прогнозирования движений биомеханической системы, на уровне расчетных моделей анализа движений, невозможно. И *только наличие математической модели синтеза движения биомеханических систем позволяет решить проблему прогностического построения техники двигательных действий*: определить траекторию перемещения звеньев тела человека, если заданы силы, вызывающие движение и изменяющие его кинематическую структуру.

Актуальность решения задач 2-го класса заключается в возможности конструирования различных вариантов техники двигательных действий с произвольными ограничениями на кинематические и динамические ресурсы исполнителя, что практически невозможно реализовать в натурном эксперименте. В

данном случае модели синтеза движений биомеханических систем выступают по существу единственным инструментом исследования сложных систем, а возможность их функционирования связана с идеей имитационного моделирования движений человека на ЭВМ.

По В.Ф. Бутузову (1988) сущность имитационного моделирования сложных систем заключается в том, что: «при имитационном моделировании используемая математическая модель воспроизводит логику ("алгоритм") функционирования исследуемой системы во времени при различных сочетаниях значений параметров системы и внешней среды» (с. 22).

В настоящее время можно выделить следующие основные этапы в технологии проведения имитационного моделирования движений человека на ЭВМ:

- составление и запись уравнений естественного движения тела человека;
- программирование цели движения в логически-смысловой форме и ее формализация;
- составление и запись уравнений целенаправленных движений человека;
- определение способа решения исходной системы уравнений;
- разработка и тестирование созданного программного обеспечения для осуществления имитационного моделирования движений биомеханической системы на ЭВМ;
- вычислительные эксперименты на ЭВМ.

Таким образом, можно отметить, что в настоящее время в биомеханике физических упражнений преобладают два основных направления моделирования техники соревновательных упражнений:

1. Определение кинематических и динамических характеристик упражнений по известной траектории звеньев тела на основе расчетных моделей анализа движений биомеханических систем. *Основная рабочая функция расчетных моделей анализа движений – получение количественной информации о кинематической и динамической структуре упражнений с целью последующего биомеханического анализа их техники.*

2. *Построение траектории движения биомеханической системы на основе математических моделей синтеза движений биомеханических систем – основная рабочая функция математических моделей синтеза движений.* Управление движением, заданное пользователем в той или иной форме на всей траектории биомеханической системы, выступает в этом случае *системообразующим* фактором заданных свойств целенаправленных движений. Варьируя программное управление и заданные начальные условия движения, получают различные модификации траектории моделируемой системы.

В связи с выделением двух направлений научного поиска рациональной структуры двигательных действий следует отметить, что процесс исследования техники двигательных действий спортсменов, с использованием математических моделей синтеза движений биомеханических систем, органически включает в себя и этап применения расчетных моделей анализа движений. Это проявляется, прежде всего, в том, что синтезированные в процессе имитационного моделирования движений человека на ЭВМ разнообразные формы двигательных действий подвергаются в дальнейшем биомеханическому анализу с целью выяснения биомеханических закономерностей сконструированных форм движений. Кроме того, при решении задач оптимального управления движением биомеханических систем возникает необходимость введения в условия задачи, в качестве критерия качества исследуемого процесса, минимизируемого функционала, чаще всего представленного в форме расчетной модели анализа движений биомеханических систем, формализующего цель движения в вычислительном эксперименте на ЭВМ.

Многие соревновательные упражнения, например, в гимнастике, выполняются с использованием сгибательно-разгибательных движений в двух суставах. К примеру, большинство оборотовых упражнений на перекладине построено на выполнении сгибательно-разгибательных движений в плечевых и тазобедренных суставах. Поэтому при исследовании техники гимнастических упражнений, построенных на сгибательно-разгибательных движениях в двух суставах, можно ограничиться использованием трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека. Однако в гимнастике существует также широкий класс движений с использованием сгибательно-разгибательных движений и в других суставах: лучезапястных, локтевых, коленных, голеностопных. Трехзвенная модель опорно-двигательного аппарата тела спортсмена в этом случае не способна решить задачу анализа движения с одновременным

изменением угла сразу в нескольких суставах. С этой целью необходимо использовать многозвенную (N-звенную) биомеханическую модель опорно-двигательного аппарата тела человека.

Принятые в биомеханике физических упражнений методы вычисления кинематических и динамических характеристик движений человека не указывают способа составления уравнений для многозвенных биомеханических систем, а ориентированы, в основном, на получение необходимых характеристик для отдельно взятого звена. Конечно, следуя традиционным методам, можно написать искомые уравнения для многозвенных вариантов модели. Однако подобный подход обладает рядом недостатков, основные из которых сводятся к следующим:

- для многозвенных биомеханических систем получаются настолько громоздкие выкладки, что нет никакой гарантии в отсутствии технических погрешностей, допущенных при выводе искомых уравнений;

- при программировании на ЭВМ возникает необходимость введения в компьютерную программу вычислительных алгоритмов не однотипной структуры, что связано с различным количеством звеньев модели в исследуемых упражнениях. При оперировании с многозвенными биомеханическими системами это ведет к появлению различного рода ошибок, конструированию блоков дополнительных логических переходов, излишнему потреблению памяти ЭВМ, неоперативному вмешательству в сценарий вычислительного эксперимента и т.п.;

- при вычислении используются массивы исходных данных промера, включающие в себя как угловые, так и линейные координаты звеньев тела, считаваемые с некоторой погрешностью. Уменьшение числа исходных данных способствовало бы уменьшению погрешности результатов вычислений;

- процесс создания расчетных моделей анализа движений для многозвенных биомеханических систем требует больших временных затрат и устойчивого внимания, что, однако, не гарантирует верного решения.

Список только этих недостатков, который к тому же можно было бы и продолжить, убедительно свидетельствует о необходимости разработки иных подходов и методов в создании расчетных моделей анализа движений и их программной реализации на ЭВМ. Анализ структуры используемых уравнений, функциональных свойства ЭВМ и методов программирования на ЭВМ позволил наметить нетрадиционный путь решения проблемы и выдвинуть *рабочую*

гипотезу о возможности освобождения человека от рутинной работы по выводу искомым уравнений для многозвенных биомеханических систем с автоматизацией этой процедуры в вычислительном эксперименте на ЭВМ. В технологии предлагаемого подхода должно соблюдаться одно неперенное условие: процесс формирования необходимых уравнений должен выполняться ЭВМ на уровне произвольного количества элементов биомеханической системы, иначе – для любой многозвенной биосистемы.

Следовательно, если обычно ЭВМ используется в основном для выполнения вычислительных операций, то в данном случае она берет на себя и функцию формирования необходимых вычислительных алгоритмов. Предполагается, что любое искомое уравнение для i -го звена можно свести к рекуррентному соотношению типа

$$F_{i+1} = F_i + K_{i+1}, \quad (6.1)$$

где F_{i+1} – уравнение, описывающее биомеханическое состояние $i+1$ звена; F_i – уравнение, описывающее биомеханическое состояние i -го звена; K_{i+1} – свободный параметр, определяемый масс-инерционными характеристиками $i+1$ звена и наложенными кинематическими связями.

В том случае, если подобная закономерность существует, то для решения поставленной задачи достаточно определить в (1) структуру F_i , K_{i+1} и, пользуясь соотношением (6.1), можно автоматизировать на ЭВМ процедуру вычисления искомым характеристик для произвольного количества звеньев моделируемой биомеханической системы. В ряде выполненных ранее исследований (Загrevский В.И., 1990–2000) показано, каким образом решается задача автоматизированного компьютерного построения расчетных моделей анализа движений многозвенных биомеханических систем.

6.3. Базовая математическая модель многозвенной неразветвленной биомеханической системы

В биомеханике физических упражнений используется определенная классификация биомеханических систем, основанная, в частности, на структурной организации опорно-двигательного аппарата тела человека. С этой целью используют, например, такие понятия как замкнутая, незамкнутая кинематическая

цепь; разветвленная, неразветвленная и т.д. В соответствии с общепринятыми понятиями, здесь и в дальнейшем, будем рассматривать математический аппарат биомеханики движений человека, используемый для описания биомеханического состояния многозвенных *неразветвленных* биомеханических систем. Основные вычислительные алгоритмы и технология их построения рассматриваются на примере трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека с дальнейшим их распространением на N -звенные биомеханические системы.

Для построения расчетных моделей анализа движений биомеханических систем, основанных на рекуррентных соотношениях типа (6.1), рассмотрим кинематическую схему трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека (рис. 6.3). В принятой модели: руки – первое звено, туловище с головой – второе звено, ноги – третье звено.

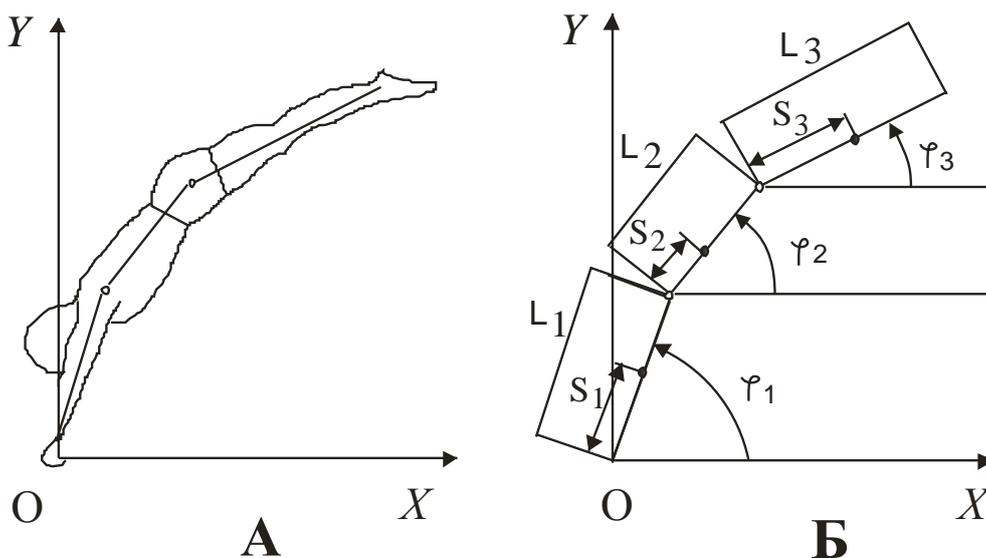


Рис. 6.3. Кинематическая схема трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека

С помощью данной модели можно исследовать кинематику и динамику вращательных движений спортсмена в условиях опоры. В процессе выполнения упражнений спортсмен не теряет контакта с опорой, к примеру, с грифом перекладины. Поэтому расположим кисти рук спортсмена в начале неподвижной системы координат $Oxу$, а ее, в свою очередь, совместим с торцом грифа перекладины.

На принятую модель наложены ограничения:

1. Звенья тела человека и гриф перекладины считаются абсолютно твердыми телами.

2. Суставы, посредством которых звенья тела человека соединяются друг с другом, моделируются цилиндрическими шарнирами.

3. Трение в шарнирах отсутствует.

4. Центры масс звеньев модели расположены на прямой, соединяющей их оси вращения в шарнирах (на продольной оси звена).

Введем в кинематическую схему модели обозначения:

L_1 – длина первого звена;

L_2 – длина второго звена;

L_3 – длина третьего звена;

S_1 – расстояние от оси вращения (гриф перекладины) до центра масс первого звена;

S_2 – расстояние от оси вращения (плечевые суставы) до центра масс второго звена;

S_3 – расстояние от оси вращения (тазобедренные суставы) до центра масс третьего звена;

φ_1 – угол, образованный первым звеном с осью Ox ;

φ_2 – угол, образованный вторым звеном с осью Ox ;

φ_3 – угол, образованный третьим звеном с осью Ox .

Для модели с произвольным количеством звеньев биосистемы введем буквенную индексацию для обозначения номера звена:

L_i – длина i -го звена;

S_i – расстояние от оси вращения i -го звена до его центра масс;

φ_i – угол наклона i -го звена к оси Ox (обобщенные координаты i -го звена);

i – буквенный индекс, используемый для обозначения номера звена ($i=1, 2, \dots, N$);

N – количество звеньев модели.

В кинематическом анализе движений биомеханических систем необходимы сведения и о пространственно-временных характеристиках: угловых скоростях и угловых ускорениях звеньев тела спортсмена. С этой целью введем обозначения для первой и второй производной по времени от обобщенных координат биомеханической системы:

$\dot{\varphi}_1$ – угловая скорость первого звена;

$\dot{\varphi}_2$ – угловая скорость второго звена;

$\dot{\varphi}_3$ – угловая скорость третьего звена;

$\ddot{\varphi}_1$ – угловое ускорение первого звена;

$\ddot{\varphi}_2$ – угловое ускорение второго звена;

$\ddot{\varphi}_3$ – угловое ускорение третьего звена.

Соответственно, для N -звенной модели биомеханической системы имеем:

$\dot{\varphi}_i$ – угловая скорость i -го звена;

$\ddot{\varphi}_i$ – угловое ускорение i -го звена;

i – буквенный индекс, обозначающий номер звена.

В связи с тем, что за обобщенные координаты биомеханической системы приняты φ_i , то $\dot{\varphi}_i$ и $\ddot{\varphi}_i$ соответственно будут обозначать обобщенную скорость и обобщенное ускорение i -го звена.

Для обозначения масс-инерционных характеристик рассматриваемой трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела спортсмена введем следующие идентификаторы:

P_1 – вес первого звена;

P_2 – вес второго звена;

P_3 – вес третьего звена;

m_1 – масса первого звена;

m_2 – масса второго звена;

m_3 – масса третьего звена;

J_1 – центральный момент инерции первого звена;

J_2 – центральный момент инерции второго звена;

J_3 – центральный момент инерции третьего звена.

В буквенной индексации, распространяемой на N -звенную модель биомеханической системы, введем следующие идентификаторы для обозначения масс-инерционных характеристик звеньев биосистемы:

P_i – вес i -го звена;

m_i – масса i -го звена;

J_i – центральный момент инерции i -го звена;

i – буквенный индекс, обозначающий номер звена.

Формульные выражения уравнений естественного движения неразветвленной трехзвенной модели биомеханической системы, представленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

$$\begin{aligned}
 & A_{11}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1) + A_{12}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_{13}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \\
 & - A_{11}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_1) - A_{12}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - A_{13}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \\
 & + Y_1 \cos \varphi_1 = 0; \\
 & A_{21}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_{22}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_2) + A_{23}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \\
 & - A_{21}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - A_{22}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_2) - A_{23}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \\
 & + Y_2 \cos \varphi_2 = 0; \\
 & A_{31}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + A_{32}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + A_{33}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_3) - \\
 & - A_{31}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - A_{32}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) - A_{33}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_3) + \\
 & + Y_3 \cos \varphi_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

В уравнениях движения (6.2) коэффициенты A_{ij} характеризуют масс-инерционный и кинематический компоненты отдельных звеньев биомеханической системы: массы (m_i), моменты инерции (J_i), длины (L_i) и положение центра масс звеньев (S_i) на продольной оси звена. Таким образом, в численных значениях динамических коэффициентов звеньев биомеханической системы (A_{ij}), учитываются антропометрические особенности сегментов и звеньев опорно-двигательного аппарата тела спортсменов.

Компактная запись формульных выражений для определения динамических характеристик звеньев тела модели в N -звенной биомеханической системе приведена в главе IV (см. уравн. 4.27, 4.28).

Содержательный смысл коэффициентов Y_i , содержащихся в левой части уравнений, заключается в том, что они представляют собой выражения для определения обобщенных сил в уравнениях Лагранжа и в развернутой записи имеют вид

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (P_1 S_1 + P_2 L_1 + P_3 L_1); \\
 Y_2 &= (P_2 S_2 + P_3 L_2); \\
 Y_3 &= (P_3 S_3).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Компактная запись уравнений, для определения обобщенных сил в уравнениях Лагранжа, имеет вид

$$Y_i = P_i S_i + L_i \sum_{j=i+1}^N P_j . \quad (6.4)$$

Можно заметить, что структура уравнений (6.4) аналогична структуре числителя в уравнениях 4.15, используемых при определении координат ОЦМ биомеханической системы. Это позволяет определять коэффициенты Y_i экспериментально-аналитическим методом, что существенно повышает точность вычислений.

6.4. Естественные движения и уравнения целенаправленных движений человека

В процессе выполнения различных упражнений на тело спортсмена действуют как внешние, так и внутренние, в частности, мышечные, силы. Задача количественного определения действия внешних сил достаточно проста и успешно решается с использованием расчетных моделей анализа движений биомеханических систем. Нахождение же численных значений величины силы тяги мышц с помощью инструментальных методов исследования связано с существенными трудностями. Одним из подходов, позволяющим дать численную оценку развиваемых спортсменом мышечных усилий при выполнении соревновательных упражнений, является аналитический расчет.

Рассмотрим естественное движение N -звенной биомеханической системы, то есть такое движение, при котором движущийся объект не вырабатывает управляющих воздействий. Дифференциальные уравнения движения такой системы можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_m} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_m} = F_m , \quad (6.5)$$

где T – кинетическая энергия; φ_m – обобщенные координаты ($m=1, \dots, N$); $\dot{\varphi}_m$ – обобщенные скорости ($m=1, \dots, N$); F_m – обобщенные силы; N – число степеней свободы.

В качестве обобщенных координат приняты углы наклона звеньев биосистемы к оси Ox декартовой системы координат.

Кинетическая энергия рассматриваемой биомеханической системы определяется из формульного выражения, которое в принятых обозначениях запишем в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n A_{ii} \dot{\varphi}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) \right]. \quad (6.6)$$

Подставим (6.6) в (6.5). Дифференцируя в (6.5) по времени обобщенные координаты и обобщенные скорости, получим формульное представление дифференциального оператора Лагранжа

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i). \quad (6.7)$$

Правую часть уравнений движения определим на основании векторного равенства

$$\mathbf{F}_v = \sum_{v=1}^N F_v \frac{\partial r_v}{\partial \varphi_i}, \quad (6.8)$$

где \mathbf{F}_v – N -мерный вектор внешних сил, приложенный к центрам масс звеньев биомеханической системы; r_v – радиус-вектор ЦМ звеньев.

В декартовой системе координат уравнения для определения обобщенных сил (\mathbf{F}_v) имеют вид

$$\mathbf{F}_v = \sum_{v=1}^N \left[X_v \frac{\partial x_v}{\partial \varphi_i} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial \varphi_i} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial \varphi_i} \right].$$

Так как внешней силой, приложенной к центрам масс звеньев тела, является сила тяжести, а X_v и Y_v равны нулю, то имеем

$$\mathbf{F}_v = \sum_{v=1}^N Z_v \frac{\partial z_v}{\partial \varphi_i} = - \left(\sum_{k=i+1}^N P_k L_i + P_i S_i \right) \cos \varphi_i. \quad (6.9)$$

Введем обозначение

$$Y_i = + \left(\sum_{k=i+1}^n P_k L_i + P_i S_i \right) \quad (6.10)$$

и запишем (6.9) в виде

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{i=1}^N Y_i \cos \varphi_i. \quad (6.11)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения естественного движения N -звенной биомеханической модели в компактной записи имеют вид

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos \varphi_i = 0. \quad (6.12)$$

Здесь N – количество звеньев моделируемой системы.

Из (6.12) видно, что количество уравнений, определяющих движение биомеханической системы, равно количеству ее степеней свободы, или числу звеньев модели, а численное значение буквенного индекса i соответствует номеру уравнения в системе уравнений.

Уравнения движения биомеханической системы, записанные в форме (6.12), остаются верны для модели с любым числом звеньев и любым числом обобщенных координат. Структура уравнений такова, что делает их удобным для автоматизированного формирования на ЭВМ.

Уравнения движения биомеханической системы, записанные в форме (6.12), являются уравнениями естественного движения, то есть такими, в которые в качестве неизвестных функций времени включены обобщенные координаты. При этом подразумевается, что движущийся объект не вырабатывает управляющих воздействий. Иначе говоря, естественное движение можно рассматривать как неуправляемое движение, не преследующее достижение цели.

Движения человека являются целенаправленными и в этой своей части они существенным образом отличаются от естественных движений. Целенаправленные движения формируются при помощи особых сил, называемых управляемыми. С этой точки зрения, человек – самоуправляемая система, использующая для управления движением вырабатываемые внутри системы мышечные силы.

В математической форме учет управляющих воздействий мышечных сил на биомеханику движения заключается во введении в правую часть уравнений естественного движения управляющих моментов мышечных сил в суставах (M_i), записываемых для i -го уравнения системы (6.12) в виде алгебраической

суммы слагаемых $M_i - M_{i+1}$, где

$$M_{i+1} \neq 0, \quad \text{если } i < N \quad \text{и} \quad M_{i+1} = 0, \quad \text{если } i = N. \quad (6.13)$$

С учетом (6.13) приведем развернутую запись уравнений целенаправленных движений человека для трехзвенной биомеханической модели в соответствии с системой уравнений (6.12)

$$\begin{aligned} & A_{11}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_1) + A_{12}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_{13}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \\ & - A_{11}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_1) - A_{12}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - A_{13}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \\ & + Y_1 \cos \varphi_1 = M_1 - M_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{21}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_{22}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_2) + A_{23}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \\ & - A_{21}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - A_{22}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_2) - A_{23}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \\ & + Y_2 \cos \varphi_2 = M_2 - M_3; \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} & A_{31}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + A_{32}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + A_{33}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_3) - \\ & - A_{31}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - A_{32}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) - A_{33}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_3) + \\ & + Y_3 \cos \varphi_3 = M_3. \end{aligned}$$

В правой части уравнений движения трехзвенной биомеханической системы заключаются сведения об управляющих моментах мышечных сил в суставах спортсмена и моменте силы трения в месте контакта спортсмена с опорой:

M_1 – момент силы трения;

M_2 – управляющий момент мышечных сил, развиваемый спортсменом в плечевых суставах;

M_3 – управляющий момент мышечных сил, развиваемый спортсменом в тазобедренных суставах.

Включая (6.13) в правую часть уравнений (6.12) запишем уравнения целенаправленного движения N -звенной биомеханической системы в компактной форме

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij}\dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos \varphi_i = M_i - M_{i+1}. \quad (6.15)$$

Решить систему уравнений (6.15) можно относительно как ее правой, так и левой частей. В первом случае необходимы данные о траекторных положениях звеньев тела спортсмена в процессе выполнения упражнений. Их можно получить по материалам оптической регистрации движений. Тогда, используя в качестве расчетной модели уравнения (6.15), определим величину управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, формирующих данное движение.

Как уже отмечалось, решить систему уравнений, описывающих целенаправленные движения человека, можно и относительно ее левой части. В частности, за исходные данные в этом случае можно принять обобщенные координаты и обобщенные скорости звеньев тела в начальный момент времени и представить в аналитическом виде или в форме заданной числовой последовательности закон изменения управляющих моментов мышечных сил по времени на всей траектории системы. Решение исходной системы уравнений с последующим интегрированием позволит получить на выходе траекторию движения моделируемой биомеханической системы. Варьируя начальные условия движения и программный закон изменения управляющих моментов мышечных сил, получим различные варианты техники двигательных действий.

Следовательно, уравнения (6.15) представляют собой *базовую математическую модель* движения рассматриваемой N -звенной биомеханической системы, и она может быть использована как для анализа, так и для синтеза техники упражнений, выполняемых спортсменом.

6.5. Программирование движений человека

В этом разделе книги введем некоторые определения и понятия, которые не рассматриваются в специальной учебной и научно-методической литературе по биомеханике физических упражнений, но понадобятся нам в дальнейшем.

Определим, построенную в форме системы дифференциальных уравнений (6.15) математическую модель движений человека, в качестве *базовой математической модели движения биомеханической системы*. Анализ структуры уравнений базовой математической модели показывает, что разрешить исходную систему уравнений можно относительно как её левой, так и правой частей. Это позволяет ставить и решать два класса задач биомеханики движений

спортсмена: задачу анализа и задачу синтеза движений биомеханических систем.

Первая (обратная) задача биомеханики заключается в численном определении внешних и внутренних сил, действующих на тело спортсмена в процессе выполнения упражнений, то есть, в частности, и в определении количественных значений правой части уравнений (6.15) на всей траектории движения. Практически она сводится к вычислительным процедурам численного определения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, реализующих траекторию реального движения. Решение этой задачи основано на применении в расчетных операциях базовой математической модели движения биомеханической системы, в которых, в качестве исходных данных, используются сведения о траекторных положениях звеньев тела исполнителей. Исходную информацию о траекторных положениях звеньев тела исполнителей можно получить по материалам оптической регистрации движений, например, после обработки материалов видеосъемки или киносъемки исследуемой группы упражнений. После считывания обобщенных координат объекта и их численного дифференцирования по времени находится левая часть уравнений (6.15), а, следовательно, и численные значения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена в дискретные моменты времени. Дискретизация модели выполняется в соответствии с шагом оптической регистрации движений по времени. Таким образом, в данном случае, базовая математическая модель биомеханической системы выполняет функцию расчетной модели анализа движений человека.

Вторая задача противоположна первой и называется в механике прямой. Если при решении обратной задачи известными функциями являются обобщенные координаты биомеханической системы, то есть, известна траектория звеньев тела спортсмена, то при решении прямой задачи эту траекторию необходимо определить. Известными функциями в этом случае полагаются:

1. *Начальные условия движения биосистемы (обобщенные координаты и обобщенные скорости в начальный момент времени).*
2. *Масс-инерционные характеристики звеньев модели.*
3. *Управляющие функции, заданные на всей траектории системы.*

Решение системы уравнений (6.15) и последующее численное интегрирование позволяют получить на каждом шаге интегрирования, в качестве выходных данных, численные значения обобщенных координат, обобщенных скоро-

стей и обобщенных ускорений, а в конечном итоге – траекторию моделируемого двигательного действия.

В зависимости от способа задания управляющих функций и моделирующего их алгоритма управления движением, базовая математическая модель движения биомеханической системы трансформируется в подкласс конструктивных математических моделей синтеза целенаправленных движений человека. Следовательно, базовая математическая модель движения биомеханической системы совмещает в себе функции расчетной модели анализа и математической модели синтеза движений.

Варьируя начальные условия движения и динамику изменения управляющих функций, задаваемых на всей траектории моделируемого движения, можно получить разнообразные формы двигательных действий, различные технические оттенки исполнения одного и того же упражнения для конкретного исполнителя.

Основываясь на вышесказанном можно заключить, что синтез движений спортсмена на ПЭВМ заключается в решении системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику движения биомеханической системы по заданным начальным условиям движения, масс-инерционным характеристикам исполнителя и сформированным на всей траектории движения биосистемы управляющим функциям.

Предлагаемая трактовка понятия моделирования движений человека на ПЭВМ отчетливо дифференцирует понятия о расчетных моделях анализа движений и математических моделях синтеза движений биомеханических систем. И здесь следует отметить, один из важнейших структурных компонентов математической модели синтеза движений биомеханических систем: управляющие функции.

Математический анализ структуры базовой математической модели биомеханической системы показывает, что управляющие функции можно задавать на различном биомеханическом уровне (Загrevский В.И., 1999): кинематическом или динамическом. Не вдаваясь в подробный структурный анализ уравнений целенаправленных движений человека (6.15), можно отметить, что управление движением рассматриваемой биосистемы реализуется моментами мышечных сил в суставах. Так как они выступают в данном случае в качестве одного из подклассов управляющих функций, то, вполне правомерно и правомочно, придать им терминологический статус: «управляющие моменты мышечных

сил» в суставах спортсмена. Данною терминологию, мы будем использовать и в дальнейшем, когда речь будет идти именно об управляющих моментах мышечных сил в суставах спортсмена, но ни в коем случае не распространяя это на весь ансамбль управляющих функций, так как мы увидим в дальнейшем, что они более разнообразны, чем рассматриваемые в данном случае.

Таким образом, можно считать, что в качестве управляющих сил, приложенных к объекту движения, могут выступать силы, вырабатываемые как вне так и внутри управляемого объекта. В биомеханике их соответственно дифференцируют на *внешние* и *внутренние* силы. Так, например, внешней управляющей силой приложенной к телу спортсмена, является помощь тренера, оказанная в какой-либо части упражнения, поддержка и т.п. Если указания об управляющих силах отсутствуют, т.е. движение является неуправляемым, то такое движение, по классификации, предложенной В.Г. Корневым (1974), называется *естественным*.

Так как двигательные действия человека преследуют достижение поставленной *цели* и реализуются с помощью *управляющих моментов мышечных сил* в суставах, то они, в противоположность естественным движениям, являются *целенаправленными*. Одним из методологических принципов построения и изучения движений, является утверждение того, что как естественные движения, так и целенаправленные подчиняются как законам механики, так и другим объективным законам природы.

Так как любое естественное движение, с помощью управляющих сил, может быть переведено в разряд целенаправленных, то отсюда следует, что целенаправленные движения представляют собой такой подкласс естественных движений, которые в соответствии с объективными законами механики принудительно изменяются так, чтобы они достигали поставленной цели движения.

Принудительное изменение движения в этом случае обеспечивается управляющими функциями, входящими в состав уравнений целенаправленных движений. Таким образом, для получения уравнений целенаправленных движений человека, необходимо:

1. Составить для изучаемого семейства движений уравнения естественного движения.
2. Ввести в уравнения естественного движения управляющие функции, в форме, соответствующей достижению цели движения.

Цель движения в этом случае должна быть формализована, т.е. задана в математической форме. Так как цель движения может быть различной не только для одной структурной группы упражнений, но и даже для одного отдельно взятого упражнения, то считается естественным, что как динамика изменения управляющих функций на всей траектории биосистемы, так и способы их формирования могут быть различными для достижения конкретной цели движения. Это обстоятельство вызывает необходимость теоретического исследования, как формообразующих элементов управляющих функций, так и способов конструирования динамики их изменения по времени. Можно даже сказать, что способы синтеза управляющих функций и поиск в этом направлении совершенных форм их компьютерного представления будут определять эффективность всего аппарата механико-математического моделирования движений человека на ПЭВМ.

6.6. Синтез программного управления в целенаправленных движениях человека

При постановке двигательной задачи в разнообразных соревновательных упражнениях можно исходить из того, что *двигательная задача* представляет собой указание тех явлений, которые должны произойти или не произойти в процессе выполнения упражнений и выраженные в *программе движения*. Иначе говоря, *программа движения* – указание в содержательной или математической форме качественных или количественных биомеханических характеристик движения в определенные моменты времени или в определенных частях упражнения. К примеру, необходимо выполнить большой оборот назад на перекладине таким образом, чтобы скорость общего центра масс биомеханической системы была максимальной в вертикальном положении над опорой, а руки, туловище, ноги располагались в это время на одной прямой. Дополнительным ограничением является необходимость того, чтобы амплитуда сгибательно-разгибательных движений спортсмена в суставах в любой части упражнения не превышала 45° . Для решения этой двигательной задачи система должна обладать определенными биомеханическими свойствами, проявляющимися как на всей траектории движения, так и в конечном положении. В этом случае, *указание требуемых значений биомеханических характеристик двигательных дей-*

ствий, определенных для конечного момента времени, или для конечного положения (возможно и на всей траектории биосистемы), и характеризующих качество выполнения движения – представляет собой цель движения.

Перевод биосистемы из одного биомеханического состояния в другое осуществляется с помощью управляющих функций, которые будем считать программными, или при синтезе движений человека на ПЭВМ – *программным управлением.* Таким образом, *программа движения* включает в себя как минимум два компонента:

- *цель движения;*
- *программное управление.*

Заданная цель движения реализуется с помощью управляющих сил (внешних и внутренних). Анализ уравнений (6.15) целенаправленных движений принятой нами модели показывает, что внешние силы выступают в качестве моментов силы тяжести отдельных звеньев модели (коэффициенты Y_i), а их равнодействующая – момент силы тяжести общего центра масс биомеханической системы. Следовательно, величина проявления действия внешних сил является функцией:

- *положения звеньев биосистемы в декартовой системе координат;*
- *конфигурации биомеханической системы.*

Так как величина моментов силы тяжести звеньев тела спортсмена является производной от траекторного положения звеньев биомеханической системы, то целенаправленно управлять величиной действия силы тяжести мы можем исключительно за счет изменения конфигурации биосистемы.

Анализ других структурных компонентов уравнений целенаправленных движений человека (6.15), показывает, что в их левую часть, в качестве неизвестных функций времени и управляющих моментов мышечных сил в суставах, входят обобщенные координаты, обобщенные скорости, обобщенные ускорения звеньев биомеханической системы, а в правую часть – управляющие моменты мышечных сил. Эти функции описывают все возможные свойства системы.

Так как, обобщенные координаты, обобщенные скорости, обобщенные ускорения звеньев модели – кинематические характеристики биомеханической системы, то логично считать, что *управляющие функции, заданные в форме кинематических характеристик, представляют собой кинематический уровень построения программного управления.*

Аналогичным образом, *управляющие функции, заданные на всей траектории биомеханической системы в форме управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, примем за динамический уровень построения программного управления.*

Третий уровень построения программного управления – *смешанный*, сочетающий в себе кинематический и динамический уровни.

Следовательно, программные законы движений человека, определяющие биомеханические свойства биосистемы в целенаправленных движениях и задаваемые в аналитической форме на всей её траектории, можно представить в виде уравнений:

- 1) связывающих между собой обобщенные координаты, а следовательно, и их производные по времени (кинематический уровень);
- 2) определяющих величины управляющих моментов мышечных сил в суставах человека (динамический уровень);
- 3) объединяющих кинематический и динамический уровни построения программного управления (смешанный уровень).

Управляющие силы, необходимые для реализации цели движения, являются в этом случае *программными силами*. Как уже указывалось, управляющие силы могут быть как внешними, так и внутренними. В частности, к внутренним программным силам правомерно отнести управляющие моменты мышечных сил в суставах спортсмена.

Математическую форму представления программного управления на динамическом уровне получим, при условии задания управляющих моментов мышечных сил на всей траектории моделируемой биосистемы:

- в табличной форме (в виде числовой последовательности);
- в аналитическом виде (формульные зависимости);
- в графическом представлении.

Здесь следует отметить тот факт, что количество уравнений, формализующих программу движения, должно соответствовать количеству уравнений целенаправленного движения, иначе – программа движения будет неполной.

Программное управление движением, реализуемое на кинематическом уровне, должно ограничивать изменения обобщенных координат и их производных по времени в соответствии с целью движения и решать поставленную двигательную задачу. Так как с помощью уравнений программного управления

формируется кинематика целенаправленного движения, то уравнения цели движения, заданные на кинематическом уровне, также определяют и программу движения.

Движение, осуществляемое в соответствии с программой движения, заданной на кинематическом, динамическом или смешанном уровнях, является программным движением или целенаправленным. По существу, все выполняемые человеком двигательные действия отличаются друг от друга лишь программой движения. Это замечание относится также к трудовым и бытовым движениям.

Любое изменение в программе движения вызывает соответствующее изменение в траектории движения биосистемы. Таким образом, компонентный состав программы движения можно представить в виде двух крупных структур (рис. 6.4): цели движения и программного управления.

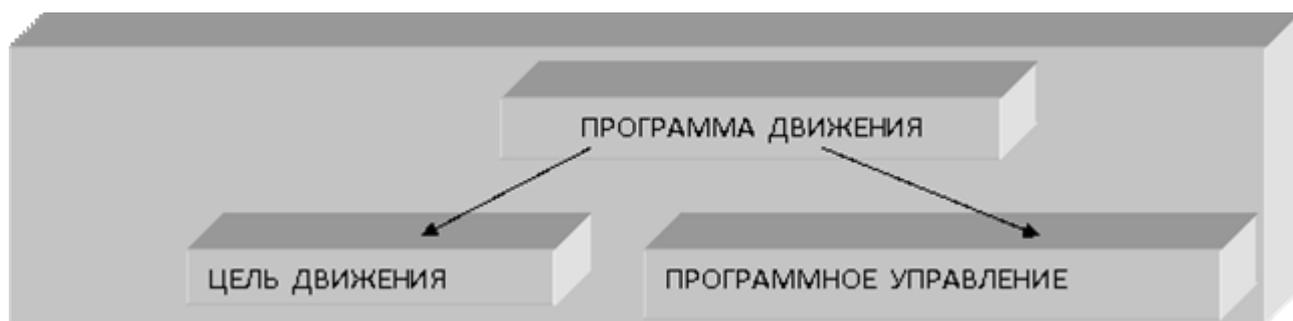


Рис. 6.4. Структура программы движения в целенаправленных движениях человека

Рассматривая в данном аспекте процесс программирования движений человека, можно отметить, что процесс программирования движения биомеханической системы представляет собой процедуру постановки цели движения в ее содержательно-смысловой и математической части, а также определение и задание такой пространственно-временной структуры программного управления, которая бы обеспечивала достижение цели движения. Математическое описание цели движения, вообще говоря, в определенном смысле и корректнее и содержательнее, чем постановка задачи в содержательно-смысловой формулировке. И, как уже отмечалось, в математической части решения проблемы дви-

жений человека, программное управление может формироваться на трех уровнях (рис. 6.5).



Рис. 6.5. Уровни построения программного управления в движениях человека

В процессе формирования программного управления следует считаться с необходимостью разрешения программы движения относительно своего уровня. На кинематическом уровне формирования программного управления это может проявиться, например, в том, что можно задать такой процесс изменения угла между звеньями тела, реализовать который спортсмен с недостаточной гибкостью и подвижностью в суставах не сможет. На динамическом же уровне это может проявиться в том, что силовых ресурсов спортсмена будет недостаточно для выполнения заданной программы движения. В этой связи, имеющийся уровень силовых ресурсов спортсмена будем называть *динамическим ресурсом* биомеханической системы, а имеющиеся ограничения на подвижность и гибкость в суставах – *кинематическим ресурсом*.

Следовательно, при программировании движений спортсмена необходимо учитывать индивидуальные особенности его физической подготовленности, проявляющиеся, в частности, в уровне кинематических и динамических ресурсов исполнителя. В то же время, это обстоятельство как раз и позволяет моделировать движения для конкретных спортсменов с учетом их индивидуальных антропометрических особенностей и уровня физической подготовленности.

6.7. Классификация математических моделей синтеза движений биомеханических систем

Рассмотрим возможные способы построения программного управления на кинематическом уровне. Теоретический анализ системы уравнений целенаправленных движений человека (6.15) показывает, что *все возможные* способы задания ограничений на обобщенные координаты биомеханической системы и их первые и вторые производные по времени можно представить в виде схемы (рис. 6.6).

Кинематический уровень задания управляющих функций $u(i)$			
Форма $u(i)$	Типы решаемых задач		
	1	2	3
1	MOD(1,1) По разнице обобщенных координат $u_i = f(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$	MOD(1,2) По обобщенным координатам $u_i = f(\varphi_i)$	MOD(1,3) По обобщенным координатам и их разнице в сочетании $u_i = f(\varphi_i, \varphi_{i+1} - \varphi_i)$
2	MOD(2,1) По разнице обобщенных скоростей $\dot{u}_i = f(\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i)$	MOD(2,2) По обобщенным скоростям $\dot{u}_i = f(\dot{\varphi}_i)$	MOD(2,3) По обобщенным координатам и их разнице в сочетании $\dot{u}_i = f(\dot{\varphi}_i, \dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i)$
3	MOD(3,1) По разнице обобщенных ускорений $\ddot{u}_i = f(\ddot{\varphi}_{i+1} - \ddot{\varphi}_i)$	MOD(3,2) По обобщенным ускорениям $\ddot{u}_i = f(\ddot{\varphi}_i)$	MOD(3,3) По обобщенным координатам и их разнице в сочетании $\ddot{u}_i = f(\ddot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_{i+1} - \ddot{\varphi}_i)$
4	MOD(4,1) Сочетания из 1, 2, 3 форм	MOD(4,2) Сочетания из 1, 2, 3 форм	MOD(4,3) Сочетания из 1, 2, 3 форм

Рис. 6.6. Классификация математических моделей синтеза движений биомеханических систем по способу задания управляющих функций на кинематическом уровне формирования программного управления

В схеме, приведенной на рис. 6.6, отражены функциональные связи, накладываемые на определенные группы кинематических характеристик и

определяющие характер задания программы движения в целом и программного управления в частности. По формам задания функциональных связей в программном управлении можно выделить 3 главные группы связей, существующих между звеньями биомеханической системы:

- по обобщенным координатам;
- по обобщенным скоростям;
- по обобщенным ускорениям.

Четвертая группа связей включает всевозможные сочетания из элементов трех главных групп: одновременно часть программных управлений представлена первой формой функциональной связи, часть – второй, оставшиеся – третьей, а также возможны разнообразные их комбинации.

Рассматриваемая классификационная схема (см. рис. 6.6) обобщает случаи и по типу решаемых задач. Дело в том, что в каждом конкретном движении используются функциональные связи программного управления, позволяющие реализовать программу движения только одного из типов решаемых задач.

Например, при синтезе упражнений в висе на перекладине можно воспользоваться любой из форм функциональной связи, относящейся к первому типу решаемых задач. При моделировании же техники схода из стойки на руках на брусьях необходимо задать программное управление для описания движения рук, т.е. воспользоваться какой-либо формой функциональной связи из 2-го типа решаемых задач. Следовательно, для синтеза конкретного двигательного действия должна быть построена своя конструктивная математическая модель синтеза целенаправленного движения, относящаяся к определенному типу решаемых задач.

Приведенная на рис. 6.6 схема охватывает все теоретически возможные формы задания программного управления на кинематическом уровне. Знание классификационной схемы математических моделей синтеза движений биомеханических систем, позволяет построить и соответствующие конструктивные модели, адекватно решающие поставленную двигательную задачу. Формально, классификационную структуру математических моделей синтеза движений биомеханических систем, можно представить в виде матричной модели MOD, элементами которой ($mod_{i,j}$) являются конструктивные математические модели. Размер матрицы MOD равен 4×3 , в которой число строк $i=1, 2, 3, 4$; число столбцов $j=1, 2, 3$.

6.8. Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на кинематическом уровне

В процессе выполнения упражнений целенаправленная траектория звеньев тела спортсмена формируется в результате выработки управляющих моментов мышечных сил. Динамика изменения величины управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена внешне проявляется в изменении позы исполнителя.

В наших исследованиях (1995–2003) показано, что при одном и том же заданном программном управлении на динамическом уровне, поза спортсмена и его траектория определяются начальными условиями движения биомеханической системы. Уже при изменении одного из параметров начальных условий биомеханической системы (обобщенные координаты, обобщенные скорости биосистемы) происходит трансформация позы и траектории исполнителя. И так как в различных участках траектории биомеханической системы, между наблюдаемыми изменениями суставных углов и величиной управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, не существует прямой зависимости, то определить необходимое программное управление для формирования заданной позы методом эвристического подбора управляющих функций в вычислительном эксперименте на ПЭВМ представляется делом безнадежным.

Это один аспект проблемы. Второй заключается в том, что процесс обучения технике соревновательных упражнений традиционно строится на кинематическом уровне задания программного управления, с указанием достижения той или иной позы в определенных фазах упражнения. На это ориентированы и все используемые в учебно-тренировочных занятиях средства обучения, реализующие принцип наглядности (кинограммы упражнений, видеограммы, натурное исполнение, макетное моделирование и т.п.). И такой методический подход вполне правомерен и оправдан, т.к. его практическое использование обосновывается, во-первых, отсутствием необходимой информации о численных значениях программного управления (управляющие моменты мышечных сил). Во-вторых, геометрико-логическая трактовка техники упражнений, для спортсмена является более удобной формой представления об управляющих функциях, чем ее реализация в программном управлении динамического уровня: в форме динамики изменения управляющих моментов мышечных сил на всей траектории

биомеханической системы. Иначе говоря, образное представление о технике соревновательных упражнений формируется у занимающихся первоначально на кинематическом уровне построения программного управления. И лишь, в дальнейшем, по мере освоения и совершенствования техники изучаемого упражнения, у спортсмена создаются необходимые предпосылки для анализа двигательных ощущений программного управления на динамическом уровне.

Таким образом, в процессе обучения двигательным действиям, спортсменом осуществляется эмпирический подбор тех управляющих воздействий со стороны опорно-двигательного аппарата и мышечной системы, которые бы обеспечивали реализацию кинематического рисунка движения, сформированного в сознании занимающегося на основе демонстрации эталонной техники спортсменами экстра-класса или другими средствами.

Следовательно, при формировании управляющих функций движения биомеханической системы на ПЭВМ, кинематический уровень построения программного управления является более предпочтительным, чем динамический. Анализ классификационной схемы математических моделей синтеза движений биомеханических систем (см. рис. 6.6) показывает, что наиболее удобным в этом случае является задание управляющих воздействий в виде программного изменения суставных углов по времени ($\text{mod}_{1,1}$).

6.9. Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением в виде изменения суставных углов по времени

Для построения математической модели целенаправленных движений человека, с программным управлением в виде изменения суставных углов по времени, воспользуемся уравнениями движения биомеханической системы, записанными в виде (6.15). Для i -го уравнения системы имеем

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos \varphi_i = M_i - M_{i+1}.$$

Здесь M_i – управляющие моменты мышечных сил в i -м суставе.

Так как программное управление задано в форме изменения суставных углов по времени, то его можно представить в виде функциональной зависимости от разницы обобщенных координат по времени. Формализуя программное управление для непрерывной модели, запишем общую структуру управляющих воздействий в виде

$$u_z = \varphi_{z+1} - \varphi_z, \quad z=1, 2, 3, \dots, N-1, \quad (6.16)$$

где запись u_z означает изменение разницы обобщенных координат $\varphi_{z+1} - \varphi_z$ по времени на всей траектории биосистемы.

Первая и вторая производные от управляющих воздействий по времени имеют вид

$$\dot{u}_z = \dot{\varphi}_{z+1} - \dot{\varphi}_z; \quad \ddot{u}_z = \ddot{\varphi}_{z+1} - \ddot{\varphi}_z. \quad (6.17)$$

Выразим кинематическую связь, наложенную на обобщенные координаты биомеханической системы, с помощью программного управления (6.16). Получим

$$\varphi_{z+1} = \varphi_z + u_z, \quad z=1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (6.18)$$

Наложённая кинематическая связь (6.18) однозначно определяет любую из обобщенных координат модели через неизвестное φ_1 и программные управления u_z , что можно представить следующей зависимостью

$$\varphi_p = \varphi_1 + \sum_{z=1}^{p-1} u_z, \quad p=2, 3, \dots, N. \quad (6.19)$$

Дифференцируя полученные уравнения (6.19) по времени, определим кинематическую связь на первую и вторую производные от обобщенных координат. Для обобщенных скоростей и ускорений имеем

$$\dot{\varphi}_p = \dot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{p-1} \dot{u}_z, \quad \ddot{\varphi}_p = \ddot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{p-1} \ddot{u}_z, \quad p=2, 3, \dots, N. \quad (6.20)$$

Системы уравнений (6.19), (6.20) связывают обобщенные координаты, скорости и ускорения биомеханической системы и позволяют определить их численные значения при известных $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$ и заданном программном управлении u_j для любого j -го звена N -звенной модели в любой момент времени. Для этого достаточно определить $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$ на всей траектории биосистемы.

Уравнения целенаправленного движения биомеханической системы получим, введя кинематические связи (6.19), (6.20) в уравнения движения (6.15). Выполнив необходимые преобразования, имеем следующую запись для i -го уравнения системы:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_j - \varphi_i) + \sum_{z=j+1}^N A_{iz} \sum_{k=1}^{z-1} \ddot{u}_k \cos(\varphi_z - \varphi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} (\dot{\varphi}_1 + \sum_{k=1}^{j-1} \dot{u}_k)^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) = \\ & = M_i - M_{i+1} - Y_i \cos \varphi_i; \quad j=1, \dots, N; \quad z=2, \dots, N-1; \quad k=1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Полученные уравнения можно преобразовать, учитывая, что заданное программное управление связывает обобщенные координаты всех звеньев биосистемы через обобщенную координату первого звена и заданное программное управление в форме (6.19). Это замечание относится также к обобщенным скоростям звеньев модели и обобщенным ускорениям (6.20). Поэтому, i -е уравнение целенаправленного движения биомеханической системы, можно представить также и в виде

$$\begin{aligned} & A_{i1} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_i) + \sum_{j=2}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_i) = \\ & = M_i - M_{i+1} - Y_i \cos \varphi_i; \quad i=1, \dots, N; \quad j=2, \dots, N; \quad k=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Система уравнений (6.22) разрешима относительно $\ddot{\varphi}_1$ любым из способов, известных в теории матричных операций и линейных уравнений. Выполнив элементарные преобразования в системе (6.22), последовательным сложением уравнений системы (начиная с последнего), получим систему, равносильную исходной, из которой и определяется $\ddot{\varphi}_1$.

Окончательное решение системы уравнений (6.22) имеет вид

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_1 - \sum_{i=1}^N [Y_i \cos \varphi_i + \sum_{j=2}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_i)]}{\sum_{i=1}^N A_{i1} \cos(\varphi_1 - \varphi_i)}. \quad (6.23)$$

Учитывая, что $\ddot{\varphi}_1$ определяется на каждом шаге интегрирования математической модели синтеза движений человека (6.23), рассмотрим вкратце алгоритмы ее построения и функционирования.

6.10. Характеристика математической модели и выбор алгоритмов ее функционирования

1. Целенаправленные уравнения движения биомеханической системы (6.22) и ее решение (6.23) построены для неразветвленной модели опорно-двигательного аппарата тела человека на основе принятой базовой модели (6.15). Их структура обеспечивает автоматизированное формирование уравнений для биомеханической системы с произвольным числом степеней свободы с помощью ПЭВМ.

2. Входными воздействиями, влияющими на траекторию модели, являются:

– динамические характеристики звеньев тела A_{ij} , учитывающие антропометрические особенности спортсменов и определяемые на основе данных о МИХ (масс-инерционные характеристики) звеньев системы. Для конкретного спортсмена и принятой модели опорно-двигательного аппарата тела спортсмена величина коэффициентов $A_{ij} = \text{const}$ на всей траектории системы и их достаточно вычислить один раз;

– программное управление u_z задается пользователем в вычислительном эксперименте в соответствии с задачами исследования. Если программное управление и его производные по времени заданы аналитическим способом на всей траектории системы, то построенная математическая модель (6.23) является непрерывной, если табличным способом – дискретная модель.

3. Время движения системы (t) ограничено временным интервалом $t_0 < t < T$, на котором задано программное управление. Дискретизация модели по времени соответствует шагу интегрирования уравнения движения. Шаг интегрирования устанавливается пользователем.

4. В начальный момент времени $t = t_0$ задаются начальные условия движения для φ_1 и $\dot{\varphi}_1$. По уравнению движения (6.22) определяется $\ddot{\varphi}_1$ для начального момента времени и согласно связям (6.19) – (6.20) вычисляются обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные ускорения для остальных звеньев модели в начальный момент времени. Предварительно необходимо на основе управлений u_z , взятых на всей траектории, вычислить значения \dot{u}_z , \ddot{u}_z для начального момента времени и на всей траектории биосистемы.

5. Дифференциальное уравнение (6.23) является уравнением второго порядка, связывающим независимую переменную t , функцию φ_1 и ее производные по времени.

6. Значение M_1 определяется физической сущностью решаемой биомеханической задачи и задается пользователем на всей траектории системы. В частности, оно может быть положено равным и нулю, что означает отсутствие трения в первом шарнире модели. Например, в вычислительном эксперименте на ПЭВМ, моделирующем выполнение оборотовых упражнений на перекладине, кисти рук гимнаста, вращающиеся относительно грифа перекладины, принимаются за первый шарнир. Другим примером является движение гимнаста из стойки на руках на брусьях. В этом случае за M_1 можно принять моменты мышечных сил в лучезапястных суставах спортсмена, т.к. в процессе выполнения упражнения кисти рук исполнителя неподвижны относительно жердей брусьев.

7. Поза исполнителя в моделируемом упражнении определяется на всей траектории биосистемы программным управлением (6.16). Обобщенные же координаты находятся для φ_1 из уравнения движения (6.23), а для остальных звеньев – из (6.19). Поэтому, на всем временном интервале движения, поза спортсмена может быть или заранее вычислена или же задана. При соответствующем алгоритме, реализующем вычислительную процедуру определения первых и вторых производных от программного управления по времени, на правом конце траектории программного управления могут быть наложены краевые условия на производные управления (\dot{i}_z, \ddot{i}_z).

8. Управляющие моменты мышечных сил (M_i) в шарнирах модели, реализующих программное управление и программу движения, определяются из системы уравнений (6.15), после нахождения обобщенных координат, скоростей и ускорений, в процессе функционирования модели.

9. Результатом функционирования модели является синтезированная траектория биомеханической системы.

Вышерассмотренные свойства математической модели синтеза движений биомеханических систем с программным управлением на кинематическом уровне, формируемым в виде закона изменения суставных углов по времени, характеризуют её основные, отличительные особенности, не затрагивая вопроса о выборе алгоритмов её функционирования. Поэтому вкратце остановимся и на

этом вопросе – о выборе алгоритмов, реализующих функционирование рассматриваемой модели.

Так как математическая модель (6.23), описывающая движение биомеханической системы по заданной программе, является дифференциальным уравнением второго порядка, то его решение, относительно высшей производной $\ddot{\varphi}_1$, основано на интегрировании этого дифференциального уравнения. В общей форме уравнение (6.23) можно записать в виде

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y').$$

Из курса вычислительной математики известно, что методы решения дифференциальных уравнений можно разделить на две большие группы:

– *аналитические* методы, позволяющие найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;

– *численные* методы приближенного решения дифференциального уравнения, позволяющие получить таблицу значений искомой функции для заданной последовательности аргументов.

Найти решение для построенной математической модели в аналитическом виде не представляется возможным, поэтому остается единственный путь – использование методов численного интегрирования. Из большой группы численных методов интегрирования, одним из методов повышенной точности является метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Этот метод и используется, в основном, в программном обеспечении вычислительных экспериментов на ПЭВМ. Так как в специальной литературе достаточно подробно изложено использование метода Рунге-Кутты в программной реализации на ПЭВМ, далее останавливаться на этом вопросе не будем и перейдем к рассмотрению технологии построения других математических моделей из классификационной схемы семейства (*mod_{i,j}*).

6.11. Математическая модель синтеза движений спортсмена с программным управлением изменения обобщенных координат

Анализ структуры уравнений базовой математической модели показывает, что программное управление может быть задано не только в форме изменения суставных углов, но и в виде программы изменения обобщенных координат по времени. Пусть движение N -звенной биомеханической системы по-прежнему описывается системой уравнений (6.15), а на каждую j -ю обобщенную координату ($j=1, 2, \dots, N$) наложено программное управление в форме

$$u_j = f(t, \varphi_j). \quad (6.24)$$

Иначе говоря, в какой-то неизвестный момент времени T , биомеханическая система должна занять положение, определяемое обобщенными координатами φ_j . Искомыми параметрами в этом случае являются:

- время движения T , до положения, заданного обобщенными координатами;
- программа изменения суставных углов на интервале $t_0 < t < T$, в соответствии с заданным шагом интегрирования для каждой временной точки дискретизации модели.

Нетрудно заметить, что задача, сформулированная в форме (6.24) формально сводится к записи, выражающей функциональную зависимость изменения величины суставных углов по времени. Действительно, если для любого момента времени t известны значения φ_j , то вполне определена и разница между ними в виде

$$\varphi_{j+1} - \varphi_j = u_j, \quad j=1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (6.25)$$

Таким образом, по существу задача сводится к построению математической модели целенаправленных движений человека с программным управлением в виде программы изменения суставных углов по времени. Отсюда следует, что окончательный вид математической модели движений спортсмена с программным управлением, заданным в виде программы изменения обобщенных

координат по времени, сводится к уравнениям (6.23). Наибольшая трудность здесь возникает с определением момента времени T , регламентирующим интервал времени процесса перехода моделируемой биосистемы из одного заданного биомеханического состояния в другое. Решение данной проблемы заключается в использовании итерационных процедур, обеспечивающих методом последовательных приближений уточнение T и формирование алгоритмов управляющих функций (6.18).

6.12. Построение конструктивных математических моделей движений спортсмена на основе программного управления по скорости (ускорению) изменения суставных углов или обобщенных координат

Уравнения (6.23) представляют собой математическую модель движения биомеханической системы с программным управлением, заданным в форме $mod_{1,1}$. Из анализа структуры классификационной схемы математических моделей синтеза движений биомеханических систем (рис. 6.6) следует, что для $mod_{i,1}$ существует возможность задать программу изменения позы спортсмена также и в виде первой или второй производной от программного управления по времени.

В случае, если заданная управляющая функция является первой производной от программного управления по времени, то её следует предварительно проинтегрировать для того чтобы получить программное управление в виде (6.18). Вторая производная находится дифференцированием заданной функции по времени.

Если же заданная функция является второй производной от программного управления, то для получения искомого программного управления её необходимо проинтегрировать дважды. После первого интегрирования получим первую производную от программного управления, после второго – искомую функцию.

В обоих случаях будем иметь полный набор программного управления в виде (6.19), что позволяет в дальнейшем использовать в имитационном моделировании движений человека на ПЭВМ математическую модель в форме (6.23).

Аналогичным образом приходим к выводу о том, что и при задании программного управления в форме $mod_{i,2}$, когда управляющая функция является

первой или второй производной от программного управления по времени, имеет место возможность использования для синтеза движений биомеханических систем математической модели в форме (6.23). Действительно, если заданная функция является первой производной от обобщенных координат по времени, то после интегрирования получим искомую функцию в виде (6.18). Подставляя решение полученной функции в уравнения программного управления (6.18), получим математическую модель в форме (6.23).

6.13. Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на динамическом уровне

Задачу синтеза движений человека с программным управлением на динамическом уровне можно сформулировать следующим образом. Для биомеханической системы, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений (6.15), определить траекторию на интервале $t \in [t_0, t_l]$, если для любого момента времени $t \in [t_0, t_l]$ известно программное управление, заданное в форме закона изменения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена по времени. Процедура решения поставленной задачи сводится к следующим операциям.

Пусть движение биомеханической системы описывается базовой математической моделью (6.15)

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos \varphi_i = M_i - M_{i+1}.$$

Здесь N – количество звеньев моделируемой биосистемы.

Введем обозначения для управляющих функций и запишем их в виде $u_i = M_i$. Приведем уравнения движения (6.15) к нормальному виду

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) - Y_i \cos \varphi_i + u_i - u_{i+1}, \quad (6.26)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

и запишем в следующей форме

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \ddot{\varphi}_j = \sum_{j=1}^N b_{ij} \dot{\varphi}_j^2 + B_i, \quad (6.27)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= A_{ij} \cos(\varphi_j - \varphi_i), \\ b_{ij} &= A_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \\ B_i &= -Y_i \cos \varphi_i + u_i - u_{i+1}. \end{aligned}$$

Запишем матрицу левой части системы уравнений (6.27), составленную из коэффициентов a_{ij} при неизвестных $\ddot{\varphi}_j$ в виде

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad (6.28)$$

а правую часть системы уравнений (6.27) в виде вектор-столбца

$$f = \left\| f_i \right\|, \quad (6.29)$$

в котором, элемент f_i определяется из выражения

$$f_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \dot{\varphi}_j^2 + B_i. \quad (6.30)$$

В сокращенной форме имеем следующую запись системы исходных уравнений (6.26)

$$A \ddot{\varphi} = f. \quad (6.31)$$

Решая систему (6.31) методом обращения матриц, получим ее решение в виде

$$\ddot{\varphi} = A^{-1} f, \quad (6.32)$$

где A^{-1} - обратная матрица по отношению к исходной матрице A .

Таким образом, уравнения (6.32) являются уравнениями движения биомеханической системы и определяют ее эволюцию во времени.

Решение системы уравнений (6.32) является тривиальной задачей и не представляет затруднений. Имеется обширная литература, освещающая техно-

логию программного обеспечения численного решения системы уравнений (6.32). Например, можно воспользоваться сведениями, приведенными в книге В.П.Дьяконова (1987).

При синтезе двигательных действий человека на ПЭВМ в качестве программного управления в уравнениях (6.32) задаются данные об изменении управляющих моментов мышечных сил и момента силы трения на всей траектории биомеханической системы.

В качестве начальных условий движения моделируемой биомеханической системы (начальный момент времени) достаточно задать обобщенные координаты и обобщенные скорости всех звеньев модели, исходя из условий решаемой задачи конструирования техники соревновательного упражнения.

Недостатком синтеза движений биомеханической системы на динамическом уровне является невозможность предсказания изменения конфигурации биосистемы (поза спортсмена) на том или ином участке траектории моделируемого движения. Математическая модель синтеза движений спортсмена в форме (6.23) свободна от этих недостатков.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под моделью и каковы ее характерные черты?
2. Какую классификацию видов моделирования предложили Б.Я.Советов и С.Я.Яковлев в 1985 году?
3. Какие виды моделирования выделяют по условиям и характеру изучаемых процессов в системе?
4. В каких трех формах проявляется мысленное моделирование?
5. На какие виды моделирования и разновидности подразделяется реальное моделирование?
6. В чем заключается кинематический анализ движений человека?
7. Что является кинематической моделью траектории реального движения?
8. В каких случаях исследования техники упражнений применяются расчетные модели анализа движений биомеханических систем и что они из себя представляют?
9. В чем заключается сущность имитационного моделирования сложных систем и какие основные этапы в технологии проведения имитационного моделирования движений человека на ЭВМ выделяют?

10. Какие направления моделирования техники соревновательных упражнений в настоящее время преобладают и в чем заключается трудность их реализации на ЭВМ?

11. Что представляет собой базовая математическая модель многозвенной неразветвленной биомеханической системы?

12. Чем уравнения естественного движения отличаются от уравнений целенаправленного движения?

13. Что понимается под управляющими функциями биомеханической системы?

14. На каких основных двух биомеханических уровнях можно задавать управляющие функции при синтезе движений человека на ЭВМ?

15. Каким образом осуществляется синтез программного управления в целенаправленных движениях человека?

16. В чем проявляется программа движения в целенаправленных движениях человека?

17. Какая в настоящее время существует классификация математических моделей синтеза движений биомеханических систем?

18. Что представляют собой конструктивные математические модели синтеза движений биомеханических систем и чем они отличаются от базовой математической модели?

19. Чем конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на динамическом уровне отличается от модели с программным управлением на кинематическом уровне?

20. В чем проявляется недостаток использования конструктивной математической модели движений спортсмена с программным управлением на динамическом уровне при ее реализации на ЭВМ?

7. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫХ УПРАЖНЕНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НА ПЭВМ

Решение двигательной задачи основано на принятии решения о возможных вариантах ее реализации. При наличии количественных мер оценки возможных вариантов решения задачи правомочно использование методов оптимизации. При этом, интересующий нас показатель, принимается за критерий качества исследуемого процесса, и сравниваются возможные варианты решения задачи по этому критерию. Вариант, для которого принятый критерий является наилучшим, принимается, остальные – отбрасываются. Наилучший по латыни – *optimum*. Отсюда, наилучшее решение называется *оптимальным*, а задача поиска оптимального решения – *задачей оптимизации*.

В этой связи уместно отметить, что с помощью ЭВМ можно синтезировать оптимальные биомеханические структуры двигательных действий спортсмена с целью достижения высоких спортивных результатов, биомеханической экономизации движений (энергетические затраты, снижение уровня силовых запросов и т.п.) В этом случае решается задача синтеза оптимального управления движением человека. Сущность решения задач этого класса заключается в определении такого управления движением биомеханической системы, которое бы доставляло минимум функционалу, выступающему в качестве цели движения и характеризующего качество выполняемого двигательного действия.

Применительно к движениям человека, для решения задач построения оптимального управления, можно использовать следующие, хорошо разработанные в математике, методы: метод локальных вариаций и метод последовательных приближений.

Первый из этих методов основан на варьировании в пространстве фазовых координат. К его достоинствам следует отнести сравнительную простоту решения задачи с ограничениями на фазовые координаты и учетом краевых условий.

Метод последовательных приближений основан на принципе максимума Л.С.Понтрягина (1961) и применим при произвольных уравнениях движения и ограничениях на управляющие функции, но требует некоторых усложнений для учета краевых условий и ограничений на фазовые координаты. Поэтому, в зависимости от конкретных особенностей поставленной задачи, для ее численного решения следует выбирать тот или иной метод.

Вышеописанные методы имеют глубокий математический фундамент, и они подробно освещаются в специальной литературе. Однако их приложение к движениям человека имеет свои специфические особенности и нуждается в соответствующей математической, логической и информационной разработке.

Анализ движения моделируемой биомеханической системы, выполненный по результатам вычислительных экспериментов (Загrevский В.И., 1999; Загrevский В.И., Лавшук Д.А., Загrevский О.И., 2000), свидетельствует о том, что в зависимости от заданного закона изменения суставных углов по времени траектория биомеханической системы различна и обусловлена определенными факторами. В теории автоматического управления эти факторы определяют в качестве *управляющих воздействий*, формирующих ту или иную траекторию изучаемой системы. В этом случае задача синтеза управляющих воздействий является задачей управления.

7.1. Общая характеристика проблемы синтеза оптимального управления в динамических системах

Под синтезом управления понимается выбор такого управления, который бы обеспечил заданные свойства эволюции изучаемого объекта. Возникающие в практике и исследуемые в теории многочисленные задачи управления можно выделить в две большие группы: задачи управления детерминированными и стохастическими системами. В *детерминированном* случае предполагается, что состояние управляемой системы полностью определяется выбранным способом управления, при известных свойствах управляемого объекта и не зависящих от нашего выбора, воздействиях внешней среды на изучаемый объект.

При *стохастическом* подходе предполагается, что ход управляемого процесса является случайным, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению. *Управление* в этом случае происходит в условиях неопределенности относительно внешних воздействий, или текущего состояния системы, которые можно считать случайными, но обладающими свойством статистической устойчивости с известными вероятностными характеристиками. Затем, используя методы теории случайных функций, по ним определяют вероятностные характеристики динамики управляющих воздействий.

Принципиальная необходимость рассмотрения различий между детерминированными и стохастическими системами управления возникает в связи с различием методов исследования, используемых в задачах управления изучаемых систем. Хорошо известно, что для детерминированных систем основным математическим аппаратом исследований построения оптимального управления является принцип максимума Понтрягина, в то время как для стохастических систем – метод динамического программирования Белмана. Попытки перенести методы исследования стохастических систем на детерминированные системы и наоборот остаются пока безуспешными.

К какому же классу систем необходимо отнести движение биомеханических объектов? Из всего вышесказанного и рассмотренного можно сделать вывод о том, что модели синтеза двигательной деятельности спортсменов относятся к классу детерминированных систем. Действительно, управление движением, влияющее на траекторию звеньев тела, формируется в виде управляющих моментов мышечных сил в суставах самим исполнителем и непредсказуемого влияния внешних моментов сил (сила тяжести) на движение тела спортсмена не существует.

Другие факторы также не подвергаются случайным изменениям (масс-инерционные характеристики).

Следовательно, исследование биодинамики движения методами математической статистики, которое иногда используется в биомеханических исследованиях, не только не оправдано, но и некорректно, так как они не могут гарантировать определенный исход каждого конкретного опыта. Статистические характеристики, как результат осреднений по большому числу опытов, могут иметь место лишь при задании параметров биомеханической модели, а в ряде случаев и при построении программного управления, которое уже не изменяет-

ся в процессе функционирования модели в рамках одного итерационного цикла. Но не более, так как найденные зависимости кинематических и динамических характеристик определяются не корреляционными связями, а функциональной зависимостью в форме уравнений (6.15) и являются производными от управления.

Так как траекторию системы формирует выбранное управление, то оно и должно быть предметом изучения управляемой биомеханической системы при исследовании закономерностей построения техники соревновательных упражнений. Существуют два способа формирования управляющих воздействий: *программное* и *позиционное*.

Управляющие воздействия в *программном управлении* заранее заданы в виде функций времени. В процессе движения системы управление не подвергается изменениям и информация об изменении состояния объекта, для внесения тех или иных педагогических коррекций в технику упражнения, в этом случае не используется.

Позиционное управление отличается от программного управления тем, что оно осуществляется по принципу обратной связи. В зависимости от складывающейся в процессе движения ситуации формируются те или иные управляющие воздействия, обеспечивающие движение по такой траектории, которая бы соответствовала требуемым свойствам эволюции управляемого процесса.

Вполне очевидно, что программное управление эффективно решает задачу управления в детерминированных системах. При заданном программном управлении синтезируется та траектория биосистемы, которая соответствует программе управления.

При достаточно конкретной постановке цели движения, задавая для каждого варианта движения то или иное программное управление, можно решить многие задачи спортивной техники и особенно при выяснении общих закономерностей построения спортивной техники. Однако во многих случаях такой подход неприемлем, так как он не может дать ответ на вопрос о построении такого управления, которое бы обеспечивало заданное качество выполнения исследуемого упражнения. С этой целью необходимо использовать методы математической теории оптимального управления.

В самой общей трактовке суть постановки и решения оптимизационной задачи заключается в определении такого управления на всей траектории системы, которое бы обеспечивало минимум (или максимум) функционалу, ха-

рактикующему определенное качество управляемого процесса. При этом на некоторые характеристики процесса накладываются определенные *ограничения*, иначе сама постановка оптимизационной задачи теряет смысл. Построенное управление, которое обеспечивает *экстремум* избранному качеству процесса, называется *оптимальным*.

Для многих содержательных задач теории оптимального управления получены существенные результаты общетеоретического плана и сформулированы общие принципы построения оптимальных траекторий, Однако в плане практической реализации общетеоретические положения имеют настолько общий характер, что применить их для сложной в динамическом отношении системы, какой является, в частности, биомеханическая система, действуя формально чаще всего бесперспективно. Если понимать метод как совокупность определенных предписаний и инструкций, следуя которым можно получить решение задачи в окончательном виде, то в настоящее время таких методов в теории оптимального управления не существует. В каждом конкретном случае, для построения алгоритма выбора оптимального управления приходится привлекать какие-либо дополнительные соображения, исходя из физической сущности решаемой задачи свойств управляемой системы. Речь, скорее всего, может идти не о методах, а о подходах к решению задач оптимального управления.

Попытки применить теоретические методы к решению конкретных практических задач на уровне сложных систем неизбежно связаны с дополнительными трудностями, одна из которых заключается в реализации процедуры оптимизации на ЭВМ, что чрезвычайно остро ставит проблему затрат машинного времени на решение задачи. Поэтому, даже если и общетеоретический метод доказывает решение оптимизационной задачи за конечное число операций и заданной точностью вычислений (а это уже действительно метод), то он может оказаться совершенно неприемлемым для фактического решения прикладных задач в силу большого объема вычислений, непосильного для современных ЭВМ.

В процессе решения оптимизационной задачи на ЭВМ оптимальное управление в общем случае формируется на основе позиционного управления, т.е. осуществляется по принципу обратной связи. Поиск оптимального управления, в большинстве случаев основывается на итерационном процессе, когда новое управление на последующей итерации определяется на основе предыдущего с учетом складывающейся в определенный момент времени ситуации. Поэтому, в

определенном смысле, можно считать оптимальное управление как результат ряда последовательных приближений к нему позиционного управления, определяемого после каждой итерации.

Естественно, что не всегда удается построить конструкцию вычислительных алгоритмов, обеспечивающих приближенное решение оптимизационной задачи. Однако практически полезным могут оказаться и те результаты, которые частичным образом решают поставленную задачу. Пусть, например, удалось определить предельное значение критерия качества для решаемой задачи, а реализующее его оптимальное управление найти не удастся. В этом случае найденный критерий может служить контрольным «эталоном» для сравнения с неоптимальным управлением.

Оценка эффективности используемых методов оптимизации выполняется, как правило, на основании вычислительных экспериментов на ЭВМ, а вычислительная математика в известной степени – экспериментальная наука. Так что практическое освоение математической теории оптимальных процессов с целью решения оптимизационных задач движения биомеханических систем возможно лишь при овладении совокупности приемов, составляющих основу вычислительной технологии.

Без грамотного оформления этой части решаемой задачи практически невозможно довести хорошую идею до уровня завершения расчета. На этом пути возможны неудачи, отрицательные результаты и даже более того они закономерны и естественны. Но научиться решать подобные задачи можно, лишь пытаясь их решать и, постепенно накапливая опыт, совершенствовать приемы вычислительной работы.

Для придания необходимой строгости вышеизложенным соображениям введем необходимую формализацию в постановке задачи оптимального управления с определенной конкретизацией частных вопросов.

7.2. Формализация задачи построения оптимальной техники соревновательных упражнений и трактовка ее содержательной части

Математическую теорию решения задач поиска наибольших и наименьших величин (экстремумов) называют теорией экстремальных задач или теорией оптимизации. При решении же аналогичных задач, состоящих в наилучшем

управлении процессом, описываемым посредством систем дифференциальных уравнений, возникают задачи *оптимального управления*. Сущность решения этих задач заключается в нахождении такого управления, которое бы минимизировало заданный критерий качества исследуемого процесса.

Для формирования задачи оптимального управления введем следующие обозначения и принятые понятия. Пусть управляемая система в каждый момент времени t описывается вектор-функцией

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)), \quad (7.1)$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор фазовых координат управляемой системы, в n -мерном Евклидовом пространстве, $E(n)$ точек $X(t)$ – ее фазовое пространство. Управляемый процесс протекает по времени на интервале $[t(0), T]$ и определен при

$$t(0) \leq t \leq T. \quad (7.2)$$

Значение $X(t)$ в момент времени t определяет состояние системы в момент t , а эволюция состояний по времени описывает системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \delta X / \delta \tau = \phi(\tau, X(\tau), u(\tau)), \quad (7.3)$$

где X – известная n -мерная функция, предполагаемая достаточно гладкой.

Пусть U – замкнутое множество m -мерного пространства. Функция $u(t)$ принадлежащая U является m -мерной вектор-функцией

$$u(t) = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (7.4)$$

и называется управлением.

Для управления $u(t)$, определенного на $[t_0, T]$, решение системы уравнений (7.3) с начальными условиями $X(t_0) = X_0$ является траекторией, а система дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию управляемой системы (7.3), – уравнениями движения системы. Ограничения, наложенные на $u(t)$, в форме

$$u \in U \quad (7.5)$$

могут быть различными для каждого из элементов и определяют допустимое управление» удовлетворяющее (7.4). Причем $u(t)$ удобно выбирать из класса измеримых функций, в частности, кусочно-непрерывных.

Одним из необходимых условий постановки задач об определении допустимого управления $u(t)$ на траектории движения системы, определяемой уравнениями и ограничениями (7.1) – (7.5), является введение минимизируемого функционала, который описывает избранную характеристику качества процесса. Иначе сама задача оптимального управления теряет

смысл.

Функционал, избираемый в качестве критерия допустимого управления, может задаваться различными математическими конструкциями. Ограничимся математической конструкцией вида

$$J = (C, x(T)), \quad T > t_0. \quad (7.6)$$

Здесь T – заданный момент времени, определяющий момент окончания процесса, $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – ненулевой постоянный вектор, а скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Задачу оптимального управления в этом случае можно сформулировать следующим образом. Для управляемой системы (7.3) с ограничениями (7.2), (7.4), (7.5) нужно определить допустимое управление $u(t)$, минимизирующее значение функционала (7.6).

Интерпретируем сформулированную задачу оптимального управления в постановке к задаче совершенствования техники соревновательных упражнений и оптимального управления движением биомеханической системы и формулируем ее.

Из теории и практики обучения движениям известно, что решение поставленной двигательной задачи можно осуществить различными способами с соответствующей траекторией звеньев тела, описываемой (7.1) в виде фазовых координат в определенные моменты времени. Относительно принятой модели фазовые координаты биомеханической системы являются ее обобщенными координатами. Отсюда размерность n -мерного вектора фазовых координат равна количеству звеньев биомеханической системы.

Время выполнения упражнения ограничено интервалом $[t_0, T]$, что и задано в виде (7.2). При этом момент окончания двигательного действия (T) определяется решением поставленной задачи или рядом других соображений, связанных с избранным критерием качества спортивной техники. За начало выполнения соревновательного упражнения выбрано $t = t_0$, а t – текущее время выполнения упражнения. Значения $x(t)$ определяют величину обобщенных координат биомеханической системы в момент времени t_i . Обычно t_i в вычислительном алгоритме задается соответствующей математической конструкцией, например, в виде $t_i = t_0 + h \cdot i$, где h – шаг дискретизации модели по времени, i – номер шага по времени.

Изменение фазовых координат объекта по времени описывается дифференциальным уравнением (7.1). Это, так сказать, общий подход к описанию эволюции исследуемого процесса. Движение же биомеханической системы

описывается системой дифференциальных уравнений в форме уравнений Лагранжа второго рода (6.15). При этом в зависимости от типа решаемых задач и построенной с этой целью математической модели движения биомеханической системы, уравнения движения имеют вид (6.15), (6.23). Следует отметить, что уравнения (6.23), (6.15) уже приведены к контравариантному виду, что обеспечивает процесс их численного решения при заданном управлении по схеме численного интегрирования с заданием краевых условий и определения текущих параметров управления методом сплайновой интерполяции. Правая часть уравнений (7.3) определяет уравнения движения как функцию времени (t), фазовых координат $X(t)$ и управления $u(t)$.

Для определенности вернемся к уравнениям (6.15). Так как управление движением биомеханической системы осуществляется выработкой управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, то будем считать их управляющими функциями. В соответствии с вышеизложенными соображениями, задача оптимального управления трактуется как задача поиска такого управления, которое бы доставило минимум (максимум) функционалу, характеризующему качество протекания процесса. Для трехзвенной модели, например, управлением являются развиваемые спортсменом моменты мышечных сил в плечевых и тазобедренных суставах, а также момент силы трения о гриф перекладины. Размерность управления (вектор $u(t)$) в данном случае равна трем, где u_1 – момент силы трения, u_2 – момент мышечных сил в плечевых суставах, u_3 – момент мышечных сил в тазобедренных суставах. При решении ряда практических задач u_1 задается из физических соображений сущности исследуемого процесса, в частности, u_1 на всей траектории системы можно положить равным нулю.

Величина развиваемой силы тяги мышц в суставах, интегральной характеристикой которой является m -мерный вектор u_m , зависит от ряда факторов: физиологического поперечника мышц, анатомических условий выполнения упражнения и т.д. Для нас важно в первую очередь то, что развиваемая спортсменом сила тяги мышц не беспредельна, а имеет определенный потолок с ограничениями для каждого сустава как в сторону выполнения сгибательных, так и разгибательных движений, что и формирует пространство управлений с ограничениями в форме (7.5). И здесь весьма важным являются два обстоятельства.

Во-первых, заданное пространство управлений дифференцированно характеризует уровень силовой подготовленности спортсменов. Поэтому каждая оптимизационная задача будет решаться для конкретного исполнителя с учетом его динамических ресурсов (силовой подготовленности). В силу этого, а также по причине наличия в уравнениях целенаправленных движений человека масс-инерционных характеристик звеньев тела, решенная оптимизационная задача определит эффективный вариант спортивной техники только для данного исполнителя. Отсюда следует, что:

– каждому исполнителю будет соответствовать своя индивидуальная спортивная техника и свое оптимальное управление по избранному функционалу;

– одним из перспективных направлений исследования техники соревновательных упражнений может стать прогнозирование двигательных действий спортсмена с учетом перспективы повышения уровня его силовых ресурсов.

И, во-вторых, так как управление формализовано в уравнениях движения биомеханической системы в виде управляющих моментов мышечных сил в суставах, то эти величины и необходимо брать в качестве показателя динамических ресурсов исполнителя. То есть ни количество подтягиваний спортсмена в висе, ни число отжиманий в упоре, ни число подниманий ног в висе или в упоре и другие тестовые показатели не могут служить критериями, определяющими динамическую достаточность спортсмена к овладению изучаемым упражнением. Эти показатели могут лишь косвенно, с какой-то степенью корреляционной связи, оценить уровень физической подготовленности спортсмена, но не дать ответ на вопрос об истинном уровне силовых ресурсов спортсмена в виде управляющих моментов мышечных сил в суставах.

Таким образом, практическая реализация синтеза оптимального управления в вычислительном эксперименте на ПЭВМ сопряжена с определением ограничений на управляющие функции, обуславливаемых силовыми ресурсами спортсмена и может осуществляться в некоторой области U – замкнутого m -мерного пространства, где m – количество управляющих функций. Область допустимого управления в отдельных суставах для каждого спортсмена, определяется экспериментально.

И, наконец, один из важнейших вопросов – проблема выбора функционала. Ориентироваться здесь необходимо, прежде всего, на решение поставленной двигательной задачи с определенной характеристикой качества выполнения

двигательного действия. Так как техническое мастерство спортсмена определяется массивом биомеханических характеристик, то и для количественной оценки качества двигательного действия можно воспользоваться соответствующим кинематическим или динамическим показателем движения.

Естественным следствием подобной трактовки оценки эффективности двигательных действий является достижение верхней или нижней грани по избранному критерию. Например, выполнить движение с наибольшей амплитудой, наибольшей скоростью, с достижением наибольшей высоты или длины, с наименьшими энергетическими затратами и т.п.

Таким образом, качество управляемого процесса, соответствием которому является техника упражнения, можно оценить с помощью избранного биомеханического критерия или, как принято в теории оптимального управления, – *функционала*. Функционал может быть задан различной математической конструкцией, например, в форме (7.6). Конструкция данного вида определяет численное значение функционала в момент окончания процесса оптимизации. К примеру, это может быть достижение наибольшей скорости вращения ОЦМ спортсмена при выполнении им большого оборота назад на перекладине в момент прохождения ОЦМ вертикального положения над опорой. Относительно решения задач, требующих максимизации функционала следует сделать следующее пояснение.

Все вычислительные процедуры в теории оптимального управления ориентированы на определение оптимального управления *минимизирующего* функционал. Однако в ряде случаев встречаются задачи противоположного характера: требуется определить оптимальное управление *максимизирующее* функционал. В математической части операция определения максимума, а не минимума функционала достигается на редкость просто: присвоением знака «минус» избранному функционалу.

В заключение необходимо отметить, что первые шаги в реализации концептуальной основы идеи имитационного моделирования и *оптимизации* движений человека методами математической теории управления динамическими системами с использованием ПЭВМ в настоящее время выполнены (Загrevский В.И., Лавшук Д.А., Загrevский О.И., 2000). Получены обнадеживающие результаты исследований построения рациональной техники соревновательных упражнений, которые ждут в дальнейшем еще более глубокой механико-математической и педагогической разработки.

Контрольные вопросы

1. Что следует понимать под задачей оптимизации и можно ли ее ставить в процессе совершенствования технического мастерства спортсмена?
2. В чем заключается сущность задач построения оптимального управления в технических действиях спортсмена?
3. Какие проблемы возникают при практической реализации синтеза оптимального управления в вычислительном эксперименте на ЭВМ?

ПРАКТИКУМ ПО БИОМЕХАНИКЕ ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ (расчетно-графические работы)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Тема: Вес сегментов тела человека и положение их центра тяжести по среднестатистическим данным.

Цель: Освоить расчетные методы биомеханики, применяемые для определения геометрии масс тела человека.

Задачи: Научиться определять вес звеньев тела человека и положение их центра тяжести на основе среднестатистических данных.

Оборудование: Сантиметровая лента, микрокалькуляторы.

Литература

1. *Донской Д.Д.* Биомеханика. Учеб. пособие для студентов фак. физ. воспитания пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1975.
2. *Донской Д.Д., Зацюрский В.М.* Биомеханика: Учеб. для ин-тов физ. культуры. М.: ФиС, 1979.

Пояснение

Тело человека можно представить в виде биомеханической системы, состоящей из отдельных сегментов: кисть, предплечье, плечо, голова, туловище, бедро, голень, стопа (рис. 1). Для определения динамических характеристик, характеризующих биодинамическую структуру спортивных упражнений, необходимо знать масс-инерционные характеристики биомеханической системы: вес звеньев тела, положение их центра тяжести, моменты инерции отдельных звеньев. До недавнего времени экспериментальное определение геометрии масс тела человека выполнялось на трупах (Harless, 1860; Braune, Ficher, 1869; Glauser et al, 1969).

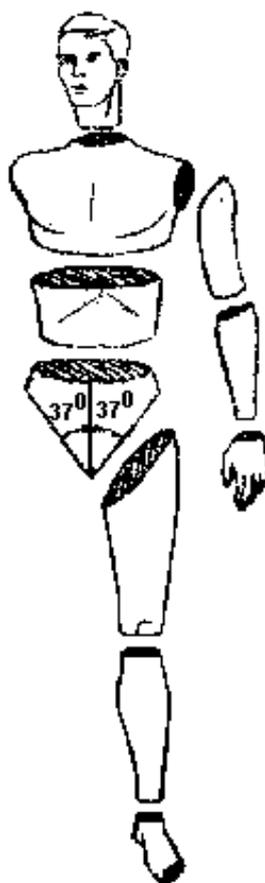


Рис.1. Сегменты тела человека: голова – 6,94%; верхний отдел туловища – 15,598%; плечо – 2,707%; средний отдел туловища – 16,327%; предплечье – 1,615%; нижний отдел туловища – 11,174%; кисть – 0,614%; бедро – 14,165%; голень – 4,330%; стопа – 1,371%

Трупы замораживались, рассекались по осям вращения в суставах, определялся вес сегментов и положение центра масс сегмента. Исследования, выполненные на большом объеме экспериментальных данных, позволили получить среднестатистические результаты о геометрии масс тела человека. Среднестатистические показатели характеризуют усредненное значение исследуемых характеристик, которые выражаются через относительные веса сегментов и через относительные коэффициенты, определяющие положение центра тяжести сегментов.

Сегменты тела человека

Указателями границ сегментов – местами прохождения плоскостей, отделяющих один сегмент от другого, являются антропометрические точки (рис.2).

Выбор способов сегментирования обусловлен требованиями биомеханики: начало и конец сегмента должны касаться оси вращения в суставе, а масса сегментов при выполнении упражнений должна оставаться постоянной.

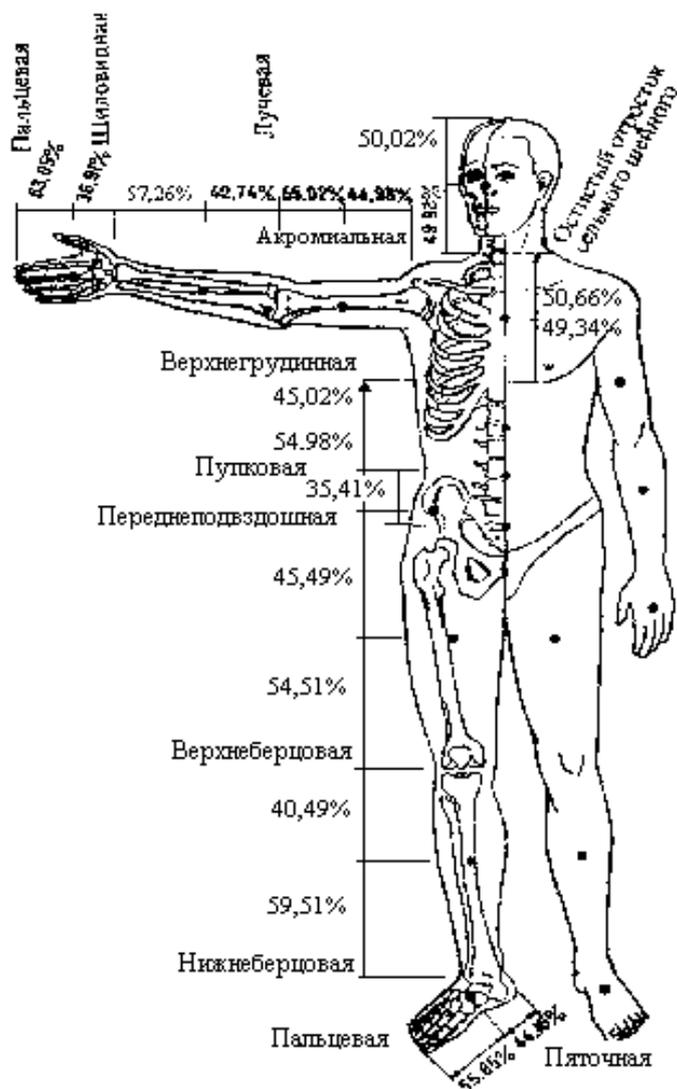


Рис.2. Антропометрические точки, определяющие границы сегментов

Вес сегментов тела

Зная вес тела и относительный вес звена в процентах (весовой коэффициент по отношению к весу тела), можно определить вес отдельных сегментов по формуле

$$P_i = \frac{P \cdot K_i}{100}, \quad (1)$$

где P – вес тела испытуемого; P_i – вес определяемого сегмента; K_i – весовой коэффициент сегмента; i – номер сегмента.

Значения весовых коэффициентов звеньев тела представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Весовые коэффициенты звеньев тела

№ п/п	Название частей тела	Весовой коэффициент (%)
1	Кисть	0,614
2	Предплечье	1,615
3	Плечо	2,707
4	Голова	6,940
5	Туловище	43,457
6	Бедро	14,165
7	Голень	4,330
8	Стопа	1,371

Пример

Допустим, вес испытуемого равен 69 кг. Тогда:

1) вес кисти равен 0,42366 кг $(69 \cdot 0,614) / 100 = 0,42366$ (кг)

2) вес предплечья равен 1,11435 кг $(69 \cdot 1,615) / 100 = 1,11435$ (кг)

3) вес плеча равен 1,86783 кг $(69 \cdot 2,707) / 100 = 1,86783$ (кг)

Аналогично определяются веса остальных сегментов тела человека.

Положение центра масс сегментов

Положение центра масс сегментов на их продольных осях определяется длиной сегмента и относительным коэффициентом в соответствии с формульной зависимостью:

$$X_C = \frac{L_i \cdot A_i}{100}, \quad (2)$$

где X_C – координата положения центра тяжести сегмента на его продольной оси; L_i – длина i -го сегмента; A_i – относительный коэффициент i -го сегмента; i – номер сегмента.

Относительный коэффициент выражает в %, по отношению к длине сегмента, положение центра тяжести звена тела. Значения относительных коэффициентов для отдельных звеньев тела представлены в таблице 2.

Антропометрические точки, от которых отсчитывается расстояние до центра тяжести сегмента для определяемых звеньев тела, следующие:

1. Кисть – шиловидная (лучезапястный сустав).
2. Предплечье – плечелоктевая (локтевой сустав).
3. Плечо – акромиальная (плечевой сустав).
4. Голова – остистый отросток 7-го шейного позвонка.
5. Туловище – акромиальная (плечевой сустав).
6. Бедро – переднеподвздошная (тазобедренный сустав).
7. Голень – верхнеберцовая (коленный сустав).
8. Стопа – пяточная.

Т а б л и ц а 2

Относительные коэффициенты звеньев тела

№ п/п	Название частей тела	Относительный коэффициент (%)
1	Кисть	36,91
2	Предплечье	42,74
3	Плечо	44,98
4	Голова	49,98
5	Туловище	44,50
6	Бедро	45,49
7	Голень	40,49
8	Стопа	44,15

Пример

1. Длина бедра испытуемого – 50 см. В соответствии с (2) и данными табл. 2 определяем, что центр тяжести бедра расположен на расстоянии 22,745 см от тазобедренного сустава (антропометрическая точка – переднеподвздошная)

$$(50 \cdot 45,49) / 100 = 22,745 \text{ (см)}.$$

2. Длина предплечья – 25 см. Следовательно, центр тяжести предплечья находится на расстоянии 10,685 см от локтевого сустава (антропометрическая точка – плечелоктевая)

$$(25 \cdot 47,24) / 100 = 11,81 \text{ (см)}.$$

Задание

1. Подготовить рабочую таблицу для определения веса сегментов тела и положения их центра тяжести с записью весовых (3-я колонка) и относительных (5-я колонка) коэффициентов (см. табл. 3). Здесь следует учесть, что относительные и весовые коэффициенты в табл. 3 приведены не в соответствии с данными табл. 1, 2, а взяты из источника (Braune, Fischer, 1869).

2. Зная собственный вес, рассчитать по формуле (1) веса отдельных звеньев тела и записать вычисленные показатели в 4-ю колонку рабочей таблицы.

3. Измерить сантиметровой лентой длины звеньев тела и вписать результаты измерения в 6-ю колонку рабочей таблицы.

4. Вычислить по формуле (2) положение центра тяжести сегментов тела с записью результатов вычислений в 7-ю колонку рабочей таблицы.

5. Показать на рисунке положение центров масс отдельных звеньев тела с указанием:

- длины звена;
- антропометрической точки (сустава), относительно которой определяется положение центра масс звена;
- расстояния от антропометрической точки в сантиметрах.

Пояснения для выполнения п. 5 задания

1. Для решения задачи введем обозначения:

1.  – сегмент.
2.  – сустав.
3.  – центр масс сегмента.

2. Кружками обозначить суставы, провести от границ суставов вверх одинаковой длины вертикальные линии, а сверху над сегментом написать название сегмента (рис. 3).

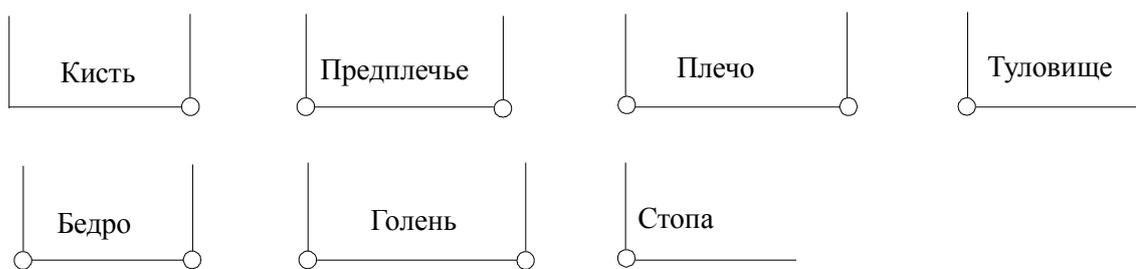


Рис. 3. Кинематическая схема сегментов

3. Над каждой вертикальной линией от сустава сегмента написать название сустава. Если для данного сегмента этот сустав является антропометрической точкой, надпись сделать цветной (рис. 4). На рис. 4 это показано курсивом.

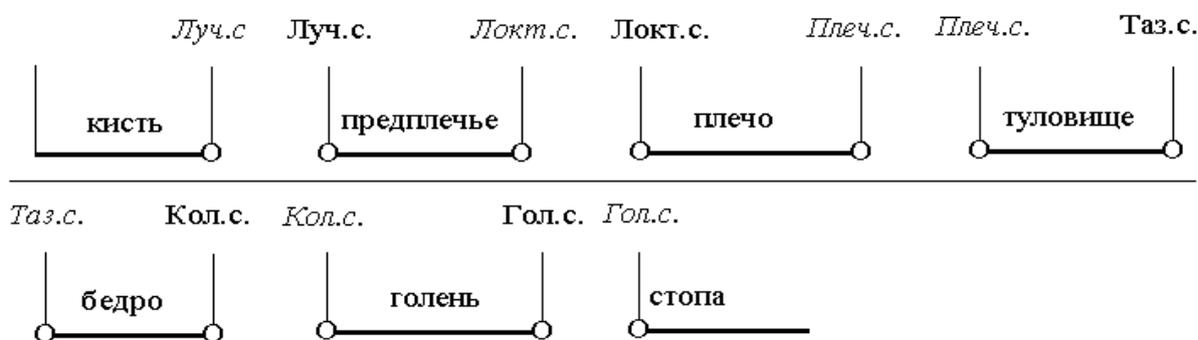


Рис. 4. Названия суставов и антропометрические точки сегментов

Обозначения названия суставов:

Луч. с. – лучезапястные суставы.

Локт. с. – локтевые суставы.

Плеч. с. – плечевые суставы.

Таз. с. – тазобедренные суставы.

Кол. с. – коленные суставы.

Гол. с. – голеностопные суставы.

4. Горизонтальными линиями со стрелками отметить над названием сегментов длину сегментов и ввести для каждого сегмента обозначения (L_i), где L – длина сегмента в сантиметрах, i – номер сегмента (рис. 5).

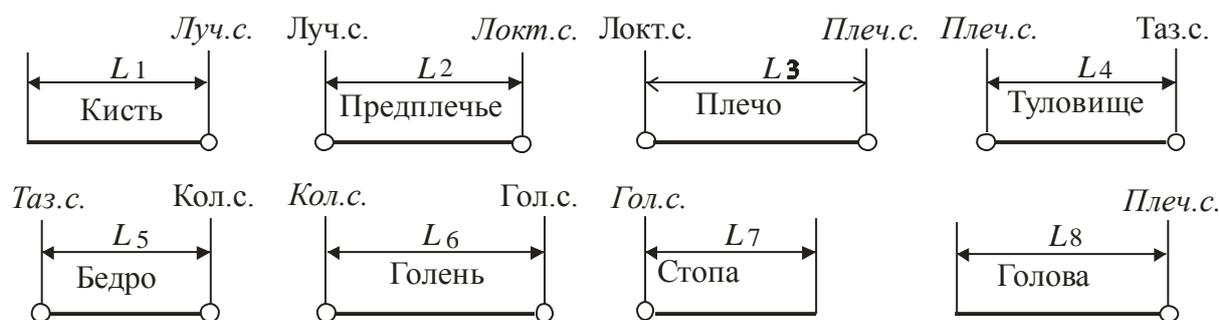


Рис. 5. Обозначение длины сегмента через символическую запись L_i

Под рисунком написать обозначения длины сегмента, а справа записать численное значение длины сегмента (после знака «=» вместо знака «?»).

Численное значение длины сегмента:

L_1 – длина кисти = ? см.

L_2 – длина предплечья = ? см.

L_3 – длина плеча = ? см.

L_4 – длина туловища = ? см.

L_5 – длина бедра = ? см.

L_6 – длина голени = ? см.

L_7 – длина стопы = ? см.

L_8 – длина головы = ? см.

5. Отметить на сегментах жирной точкой положение центра масс сегмента (рис. 6). Провести по вертикали вниз от центра масс сегментов вертикальные линии. Определить для сегмента антропометрическую точку (сустав на рис. 5, название которого написано курсивом) и провести от нее вертикальную линию вниз.

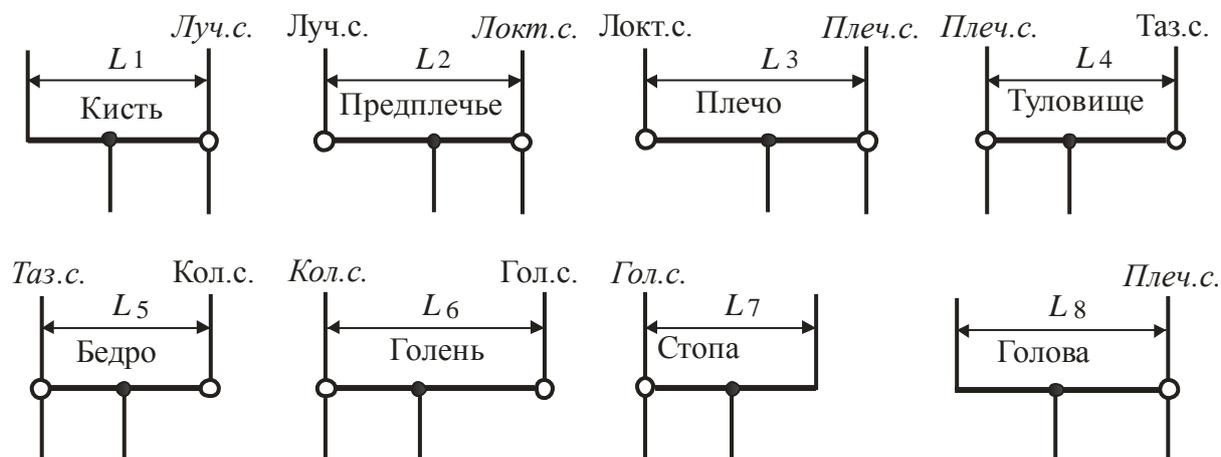


Рис. 6. Положение центра масс сегментов

6. Горизонтальными линиями со стрелками отметить под названием сегментов расстояние от антропометрической точки сегмента до его центра масс (рис.7). Ввести для каждого расстояния обозначения (S_i), где S – расстояние от антропометрической точки сегмента до его центра масс, i – номер сегмента.

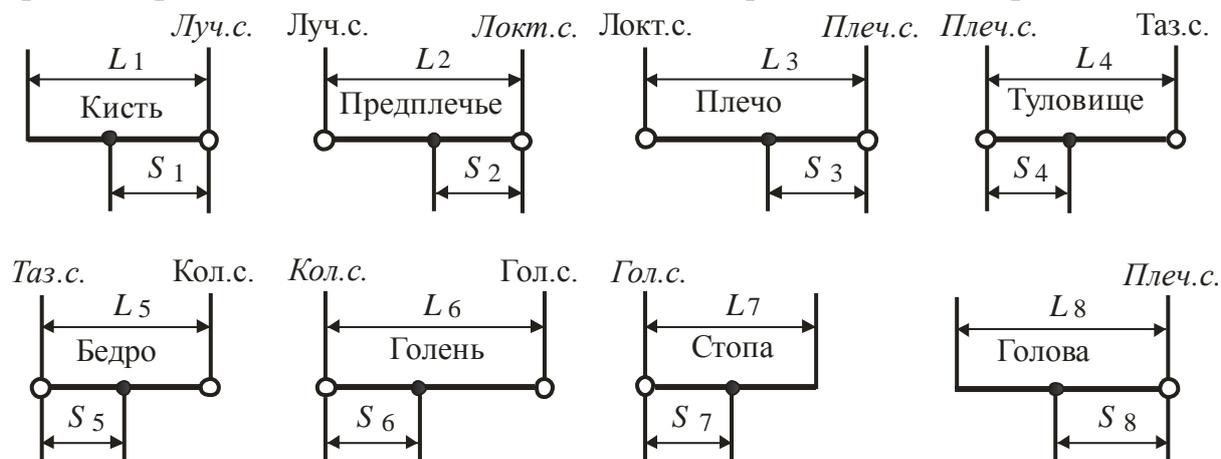


Рис. 7. Обозначения расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс через символическую запись S_i

Под рисунком написать обозначения *расстояния от антропометрической точки до центра масс сегмента* (S_i), а ниже записать их численное значение (после знака «=» вместо знака «?»).

Обозначения расстояния от антропометрической точки до центра масс сегмента:

S_1 – расстояние от антропометрической точки до центра масс кисти по оси Ox .

S_2 – расстояние от антропометрической точки до центра масс предплечья по оси Ox .

S_3 – расстояние от антропометрической точки до центра масс плеча по оси Ox .

S_4 – расстояние от антропометрической точки до центра масс туловища по оси Ox .

S_5 – расстояние от антропометрической точки до центра масс бедра по оси Ox .

S_6 – расстояние от антропометрической точки до центра масс голени по оси Ox .

S_7 – расстояние от антропометрической точки до центра масс стопы по оси Ox .

S_8 – расстояние от антропометрической точки до центра масс головы по оси Ox .

Численное значение расстояния от антропометрической точки до центра масс сегмента:

$S_1 = ?$ см.

$S_2 = ?$ см.

$S_3 = ?$ см.

$S_4 = ?$ см.

$S_5 = ?$ см.

$S_6 = ?$ см.

$S_7 = ?$ см.

$S_8 = ?$ см.

Т а б л и ц а 3

Рабочая таблица для определения веса сегментов тела и положения центра тяжести звеньев тела

1	2	3	4	5	6	7
№ п/п	Название частей тела	Весовой коэффициент (%)	Вес сегмента (кг)	Относительный коэффициент (%)	Длина сегмента (см)	Положение центра тяжести сегмента
1	Кисть	1		50		
2	Предплечье	2		42		
3	Плечо	3		47		
4	Голова	7		50		
5	Туловище	43		44		
6	Бедро	12		44		
7	Голень	5		42		
8	Стопа	2		44		

Примечание. Необходимо помнить, что в таблице даны весовые коэффициенты отдельных звеньев тела: одной кисти, одного предплечья и т.д. Поэтому при определении веса парных конечностей (рук, ног), получаемый результат умножается на два.

В качестве примера по определению веса сегментов тела и получения их центра тяжести в табл. 4 приведены вычисленные показатели для испытуемого весом 80кг и размерами длины звеньев тела, указанными в колонке 6.

**Рабочая таблица для определения веса сегментов тела
и положения центра тяжести звеньев тела**

1	2	3	4	5	6	7
№ п/п	Название частей тела	Весовой коэффициент (%)	Вес сегмента (кг)	Относительный коэффициент (%)	Длина сегмента (см)	Положение центра тяжести сегмента
1	Кисть	1	0,80	50	20,0	10,00
2	Предплечье	2	1,60	42	26,0	10,92
3	Плечо	3	2,40	47	24,5	11,52
4	Голова	7	5,60	50	23,0	11,50
5	Туловище	43	34,40	44	48,0	21,12
6	Бедро	12	9,60	44	43,0	18,92
7	Голень	5	4,00	42	38,0	15,96
8	Стопа	2	1,60	44	25,5	11,92

Контрольные вопросы

1. Что представляют собой сегменты тела человека и какие антропометрические точки являются указателями границ сегментов?
2. Как определяется вес звеньев тела человека по среднестатистическим показателям?
3. Каким образом можно определить положение центра тяжести сегментов тела человека?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема: Определение веса звеньев тела человека и положения их центра тяжести с применением уравнений множественной регрессии.

Цель: Освоить расчетные методы биомеханики, применяемые для определения геометрии масс тела человека.

Задачи: Научиться определять вес звеньев тела человека и положение их центра тяжести с использованием регрессионных уравнений.

Оборудование: Антропометр, медицинские весы, микрокалькуляторы.

Литература:

1. *Донской Д.Д., Зациорский В.М.* Биомеханика: Учеб. для ин-тов физ. культуры. М.: ФиС, 1979.
2. *Зациорский В.М., Аруин А.С., Селуяное В.Н.* Биомеханика двигательного аппарата человека. М.: ФиС, 1974.

Пояснение

Несмотря на популярность использования весовых и относительных коэффициентов, в биомеханических расчетах геометрии масс тела человека эти показатели нельзя считать достаточно точными. Они не отражают в полной мере индивидуальные конституционные особенности строения опорно-двигательного аппарата тела человека. Это обстоятельство является следствием того, что взаимосвязь между весом сегмента и весом тела, между относительным расстоянием от проксимального конца звена до его центра тяжести и длиной звена не может быть выражена регрессионным уравнением вида $Y = A \cdot X$, где Y – вес сегмента или положение его центра тяжести, A – весовой или относительный коэффициенты, X – вес тела или длина звеньев тела.

Результаты определения геометрии масс тела человека с помощью радиоизотопной методики (В.М. Зациорский и др., 1981) свидетельствуют о том, что даже в простейшем случае искомая связь имеет вид: $Y = A_0 + A_1 X$. Для более точного определения значений веса сегментов можно воспользоваться уравнениями регрессии, в которых аргументом служит не только вес, но и длина тела (табл. 1). С помощью этой таблицы можно оценить и положение центра масс сегментов тела.

Положение центра масс и вес сегментов определяется по формуле

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2, \quad (1)$$

где X_1 – вес тела; X_2 – длина тела (рост); B_i – коэффициенты уравнений множественной регрессии.

Т а б л и ц а 1

**Коэффициенты уравнений множественной регрессии для вычисления
масс-инерционных характеристик сегментов тела человека
по весу (X_1) и длине (X_2) тела**

Сегмент	B_0	B_1	B_2
Масса сегмента, кг			
Кисть	-0,1165	0,0036	0,00175
Предплечье	0,3185	0,01445	-0,00114
Плечо	0,250	0,03012	-0,0027
Голова	1,296	0,0171	0,0143
Бедро	-2,649	0,1463	0,0137
Голень	-1,592	0,0362	0,0121
Стопа	-0,829	0,0077	0,0073
Положение центра масс на продольной оси сегмента, см			
Кисть	4,11	0,026	0,033
Предплечье	0,192	-0,028	0,093
Плечо	1,67	0,03	0,054
Голова	8,357	-0,0025	0,023
Бедро	-2,42	0,038	0,135
Голень	-6,05	-0,039	0,142
Стопа	3,767	0,065	0,033

Примечание. Центр тяжести туловища определяется по относительному коэффициенту, равному 44,5%.

Пример

Вес испытуемого (X_1) – 70,0 кг, длина тела (X_2) – 165 см.

Вес голени равен 2,5965 кг, $Y = -1,592 + 0,0362 \cdot 70 + 0,0121 \cdot 165$.

Центр масс голени находится на расстоянии 20,11 см от коленного сустава,
 $Y = -6,05 - 0,039 \cdot 70 + 0,142 \cdot 165$.

Для определения высоты вершечной точки или длины тела исследователь устанавливает антропометр строго вертикально, накладывает линейку на вершечную точку и фиксирует ее рукой. Ввиду возможного смещения голо-

вы рекомендуется производить измерение 2–3 раза и брать среднее число. Определение веса производится на медицинских весах с точностью до 50 грамм.

Задание

1. Определить свой рост и вес.
2. Подготовить рабочую таблицу для ее заполнения расчетными показателями (табл. 2).
3. Пользуясь формульным выражением (1) и данными табл. 1, вычислить вес сегментов тела и записать вычисленные показатели в табл. 2.

Таблица 2

Рабочая таблица для вычисления масс-инерционных характеристик сегментов тела человека по весу (X_1) и длине (X_2) тела

Сегмент	B_0	B_1	B_2	Расчетные данные
Масса сегмента, кг				
Кисть	-0,1165	0,0036	0,00175	
Предплечье	0,3185	0,01445	-0,00114	
Плечо	0,250	0,03012	-0,0027	
Голова	1,296	0,0171	0,0143	
Бедро	-2,649	0,1463	0,0137	
Голень	-1,592	0,0362	0,0121	
Стопа	-0,829	0,0077	0,0073	
Положение центра масс на продольной оси сегмента (см)				
Кисть	4,11	0,026	0,033	
Предплечье	0,192	- 0,028	0,093	
Плечо	1,67	0,03	0,054	
Голова	8,357	-0,0025	0,023	
Бедро	-2,42	0,038	0,135	
Голень	-6,05	-0,039	0,142	
Стопа	3,767	0,065	0,033	

Контрольные вопросы

1. Почему метод весовых и относительных коэффициентов не находит широкого применения в практике при определении геометрии масс тела человека?
2. В чем заключается сущность использования регрессионных уравнений?
3. Каким образом определяются динамические характеристики звеньев тела человека с использованием уравнений множественной регрессии?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Тема: Определение координат суставов и центра масс сегментов тела человека в различных положениях.

Цель: Научиться определять координаты суставов и центра масс сегментов тела человека в различных положениях.

Задачи: Определить координаты суставов и центра масс сегментов тела человека в положениях:

- 1) лежа на спине – руки вверх.
- 2) вис углом на гимнастической стенке.

Инструменты и оборудование: тетрадь для лабораторных работ, карандаш, резинка, ручка или фломастер, линейка, микрокалькулятор.

Ход работы

Решение задачи 1 – (2 часа)

1. Нарисовать в тетради прямоугольную систему координат Oxy (рис.1).

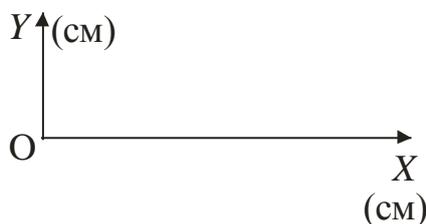


Рис. 1. Прямоугольная система координат

2. Разместить в декартовой (прямоугольной) системе координат тело человека в положении, соответствующем решению задачи 1 (рис.2). При этом центр масс кисти расположить в начале системы координат и учесть, что в положении «Лежа на спине – руки вверх», положение рук определяется по гимнастической терминологии по отношению к туловищу. Кружками обозначить суставы, провести от границ суставов вверх и вниз одинаковой длины вертикальные линии и ввести обозначения.

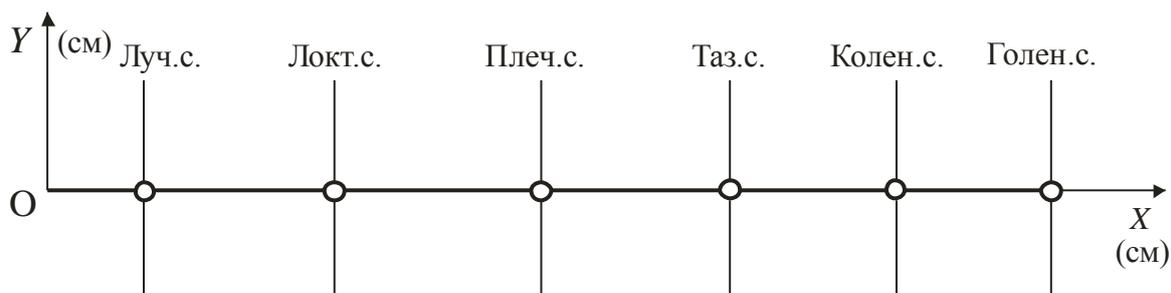


Рис. 2. Обозначения названия суставов

Обозначения названия суставов:

Луч. с. – лучезапястные суставы.

Локт. с. – локтевые суставы.

Плеч. с. – плечевые суставы.

Таз. с. – тазобедренные суставы.

Колен. с. – коленные суставы.

Голен. с. – голеностопные суставы.

3. Прорисовать сегменты тела человека жирной линией и отметить на сегментах жирной точкой положение центра масс сегмента (рис. 3). Записать над сегментами их название и провести по вертикали вниз от центра масс сегментов укороченные, по сравнению с суставными линиями, вертикальные линии.

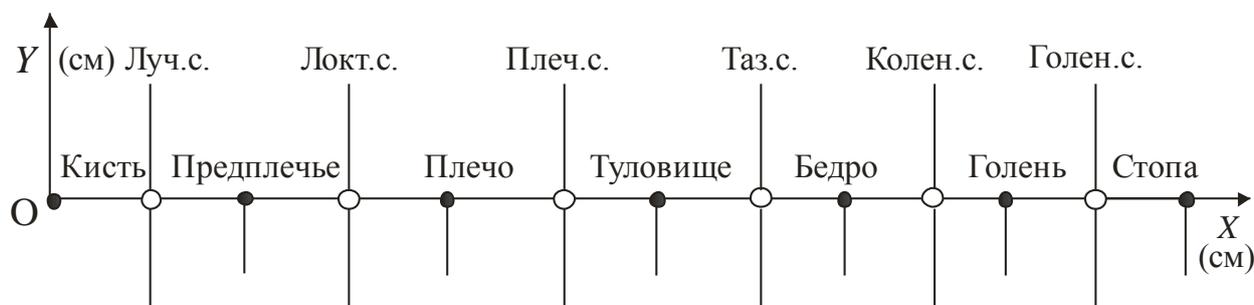


Рис. 3. Положение центра масс сегментов

4. Горизонтальными линиями со стрелками отметить над названием сегментов длину сегментов и ввести для каждого сегмента обозначения длины сегмента (L_i), где L – длина сегмента в сантиметрах, i – номер сегмента (рис. 4).

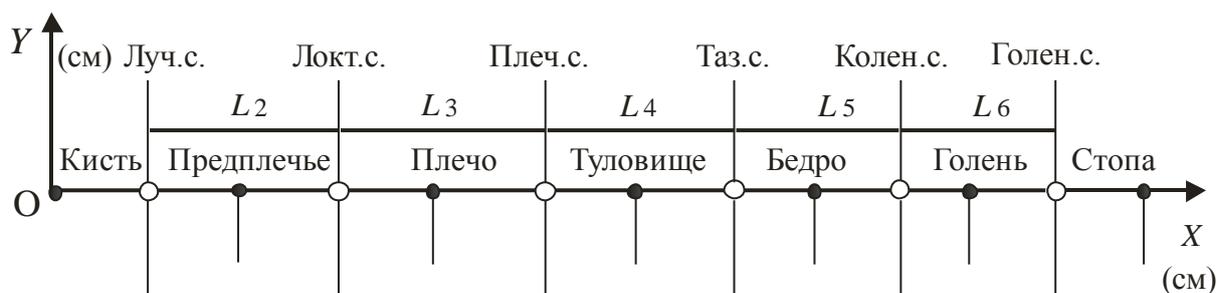


Рис.4. Обозначение длины сегмента через через символьную запись L_i

Обозначения длины сегмента:

L_1 – длина кисти.

L_2 – длина предплечья.

L_3 – длина плеча.

L_4 – длина туловища.

L_5 – длина бедра.

L_6 – длина голени.

L_7 – длина стопы.

5. Горизонтальными линиями со стрелками отметить под названием сегментов расстояние от антропометрической точки сегмента до его центра масс (рис.5). Ввести для каждого расстояния обозначения (S_i), где S – расстояние от антропометрической точки сегмента до его центра масс, i – номер сегмента.

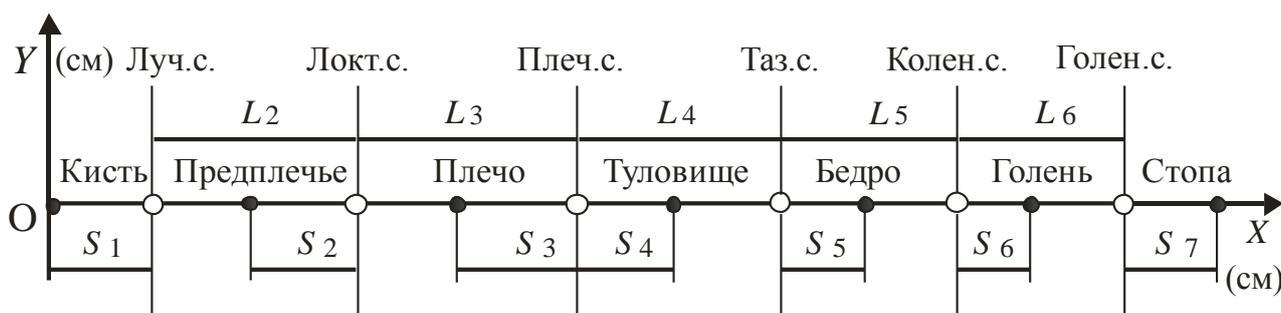


Рис. 5. Обозначения расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс через символьную запись S_i

6. Обозначить на рисунке координаты центра масс сегментов через символьную запись X_{c_i} , Y_{c_i} . Здесь X_c , Y_c обозначает координату центра масс сегмента по осям Ox , Oy декартовой системы координат, i – номер сегмента (рис. 6).

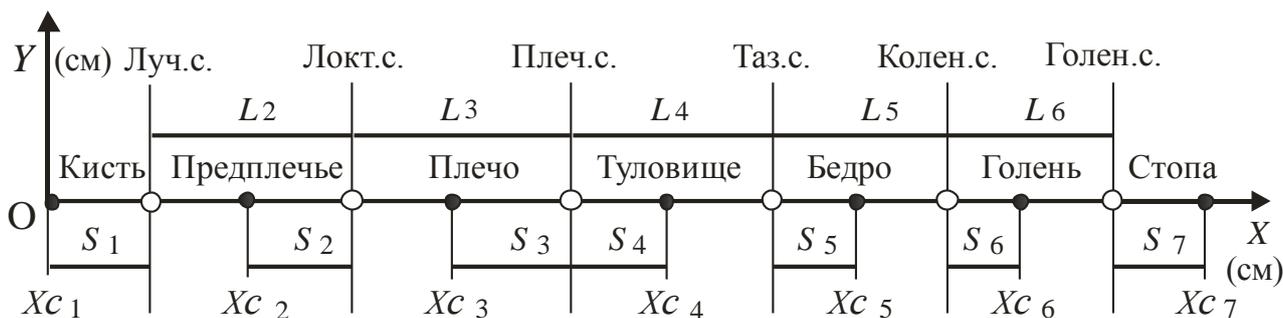


Рис. 6. Обозначения координат центра масс сегментов через символическую запись X_{c_i} , Y_{c_i}

Обозначения координат центра масс сегмента:

X_{c_1} , Y_{c_1} – координата центра масс кисти по осям Ox , Oy .

X_{c_2} , Y_{c_2} – координата центра масс предплечья по осям Ox , Oy .

X_{c_3} , Y_{c_3} – координата центра масс плеча по осям Ox , Oy .

X_{c_4} , Y_{c_4} – координата центра масс туловища по осям Ox , Oy .

X_{c_5} , Y_{c_5} – координата центра масс бедра по осям Ox , Oy .

X_{c_6} , Y_{c_6} – координата центра масс голени по осям Ox , Oy .

X_{c_7} , Y_{c_7} – координата центра масс стопы по осям Ox , Oy .

Так как продольная ось сегментов расположена на оси Ox , то координата центра масс всех сегментов по оси Oy равна нулю или $Y_{c_i} = 0$; $i=1, 2, \dots, 7$.

7. Обозначить на рисунке координаты суставов сегментов через символическую запись X_i , Y_i . Здесь X , Y обозначает координату центра масс сегмента, i – номер сегмента (рис. 7). Так как продольная ось сегментов расположена на оси Ox , то координата суставов всех сегментов по оси Oy равна нулю или $Y_i = 0$; $i=1, 2, \dots, 7$.

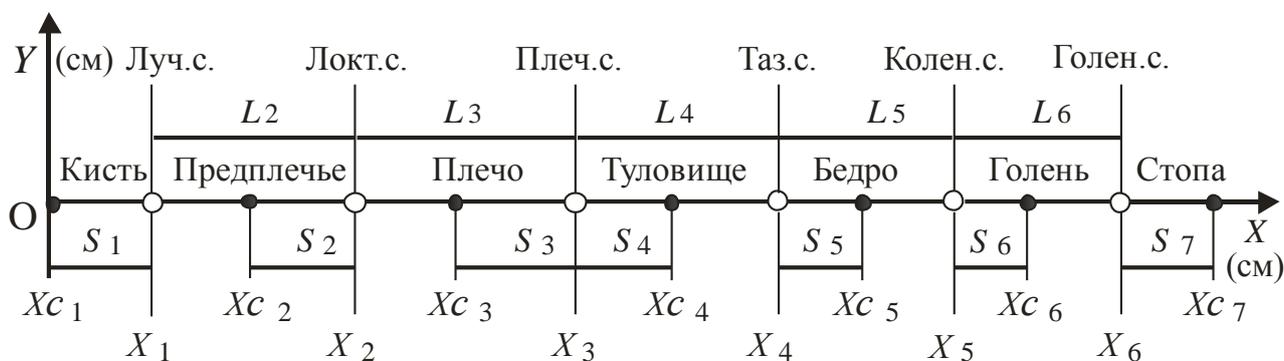


Рис. 7. Обозначения координат суставов через символическую запись X_i , Y_i

Обозначения координат суставов:

X_1, Y_1 – координата лучезапястных суставов по осям Ox, Oy .

X_2, Y_2 – координата локтевых суставов по осям Ox, Oy .

X_3, Y_2 – координата плечевых суставов по осям Ox, Oy .

X_4, Y_4 – координата тазобедренных суставов по осям Ox, Oy .

X_5, Y_5 – координата коленных суставов по осям Ox, Oy .

X_6, Y_6 – координата голеностопных суставов по осям Ox, Oy .

8. Осталось определить координату центра масс головы по оси Ox . Для этого от плечевых суставов в сторону кистей рук отложим расстояние S_8 , равное расстоянию от антропометрической точки головы до его центра масс. Как обычно отметим положение центра масс головы на оси Ox жирной точкой (рис. 8), а координату центра масс головы по оси Ox запишем в виде X_{c8} .

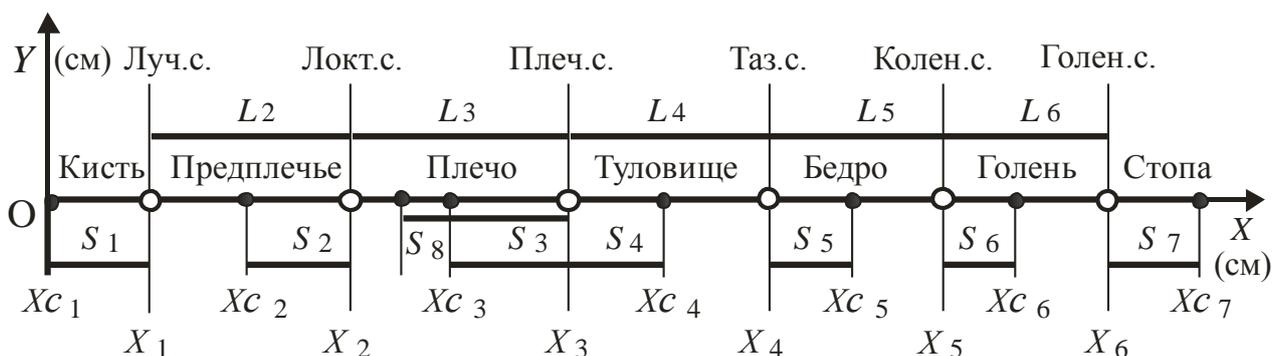


Рис. 8. Кинематическая схема опорно-двигательного аппарата тела человека в положении «лежа на спине – руки вверх»

9. Подготовить таблицу данных длин сегментов и расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс (табл. 1). Обозначения в таблице уже известны, поэтому они не требуют специальных пояснений. Для известных значений координат суставов и центра масс сегментов по оси Oy можно сразу записать в таблицу их нулевые значения.

Задание

1. Изучить ход лабораторной работы и последовательно выполнить все ее этапы (с 1-го по 8-й пункты).

2. Используя измеренные при выполнении 1-й лабораторной работы данные о длинах сегментов (L_i) и вычисленные, при выполнении 2-й лабораторной

работы, значения расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс (S_i) вписать их в табл. 1.

3. Пользуясь табл. 1 (колонки 3, 4) и рисунком 8 определить координаты суставов (X_i) и вписать их в табл. 1 (колонка 5).

4. Пользуясь табл. 1 (колонки 4, 5) и рис. 8 определить координаты центра масс сегментов по оси Ox (X_{ci}) и вписать их в табл. 1 (колонка 6).

5. Пользуясь рис. 8 определить координаты суставов по оси Oy (Y_i) и вписать их в табл. 1 (колонка 7).

6. Пользуясь рис. 8 определить координаты центра масс сегментов по оси Oy (Y_{ci}) и вписать их в табл. 1 (колонка 8).

Т а б л и ц а 1

Длины сегментов (L_i), расстояние (S_i) от антропометрической точки сегмента до его центра масс, координаты суставов (X_i, Y_i) и центра масс сегментов (X_{ci}, Y_{ci}) по осям Ox, Oy декартовой системы координат

1	2	3	4	5	6	7	8
№ п/п	Сегмент	L_i	S_i	X_i	X_{ci}	Y_i	Y_{ci}
1	Кисть						
2	Предплечье						
3	Плечо						
4	Туловище						
5	Бедро						
6	Голень						
7	Стопа						
8	Голова						

Решение задачи 2 – (2 часа)

1. Нарисовать в тетради прямоугольную систему координат Oxy (рис. 9).

2. Для решения задачи 2, разместить в декартовой (прямоугольной) системе координат тело человека. Ось тазобедренных суставов расположить в начале системы координат. Кружками обозначить суставы, провести от границ суставов (коленные суставы и голеностопные) вверх и вниз одинаковой длины вертикальные линии и ввести обозначения для суставов (рис. 10). Провести от гра-

ниц суставов (тазобедренные, плечевые, локтевые, лучезапястные суставы) горизонтальные линии и ввести обозначения для суставов (рис. 10).

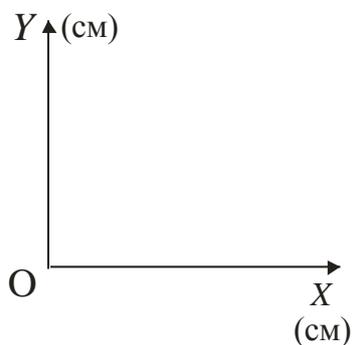


Рис. 9. Прямоугольная система координат

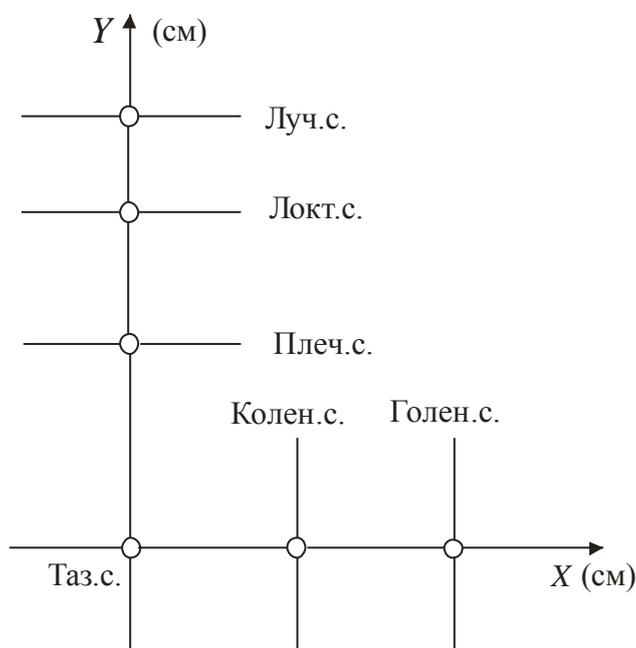


Рис. 10. Обозначения названия суставов

Обозначения названия суставов:

Луч. с. – лучезапястные суставы.

Локт. с. – локтевые суставы.

Плеч. с. – плечевые суставы.

Таз. с. – тазобедренные суставы.

Колен. с. – коленные суставы.

Голен. с. – голеностопные суставы.

3. Прорисовать сегменты тела человека жирной линией и отметить на сегментах жирной точкой положение центра масс сегмента (рис. 11). Записать над сегментами (и справа – на рисунке показано курсивом) их название и провести по вертикали вниз от центра масс сегментов укороченные, по сравнению с суставными линиями, вертикальные линии (для бедра, голени, стопы) и горизонтальные линии (для кисти, предплечья, плеча, туловища).

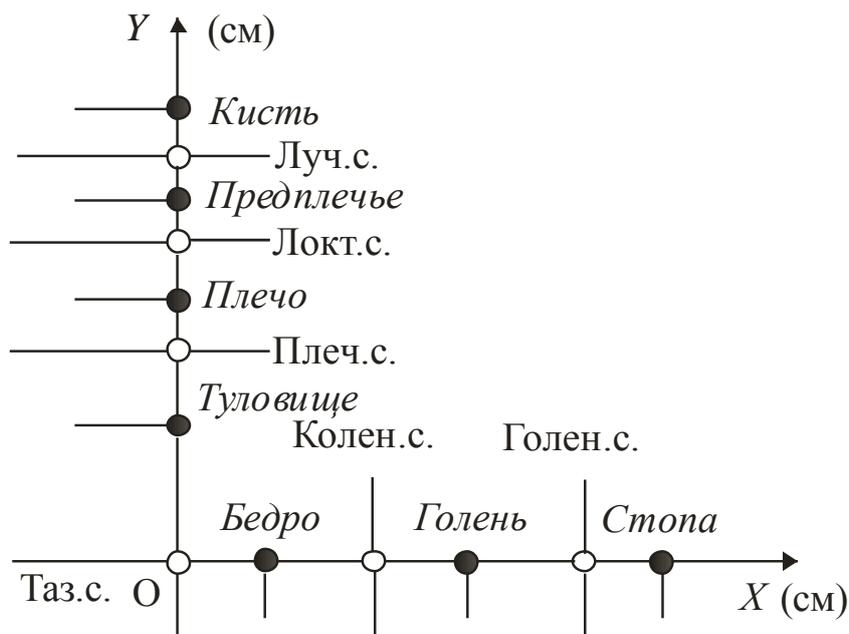


Рис. 11. Положение центра масс сегментов

3. Горизонтальными линиями (бедро, голень, стопа) и вертикальными (предплечье, плечо, туловище) со стрелками отметить длину сегментов и ввести для каждого сегмента обозначения (L_i), где L – длина сегмента в сантиметрах, i – номер сегмента (рис. 12).

4. *Обозначения длины сегмента:*

L_1 – длина кисти.

L_2 – длина предплечья.

L_3 – длина плеча.

L_4 – длина туловища.

L_5 – длина бедра.

L_6 – длина голени.

L_7 – длина стопы.

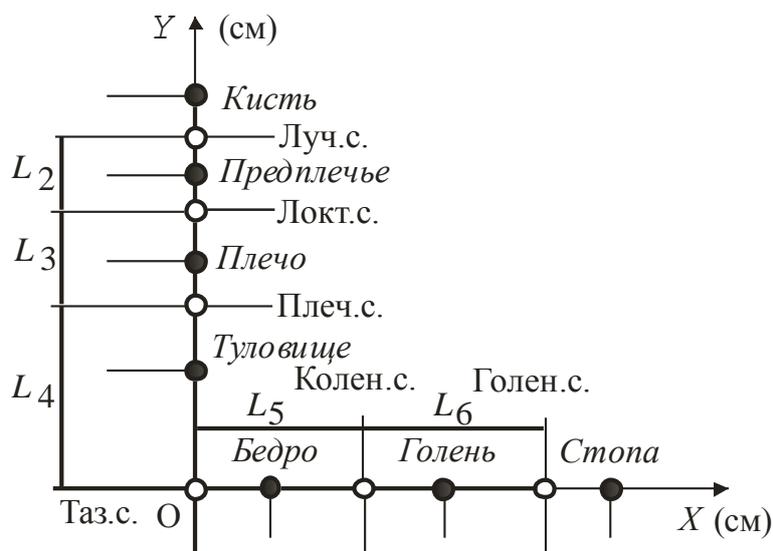


Рис. 12. Обозначение длины сегмента через символическую запись L_i

5. Горизонтальными линиями со стрелками отметить под названием сегментов расстояние от антропометрической точки сегмента до его центра масс (рис.13). Ввести для каждого расстояния обозначения (S_i), где S – расстояние от антропометрической точки сегмента до его центра масс, i – номер сегмента.

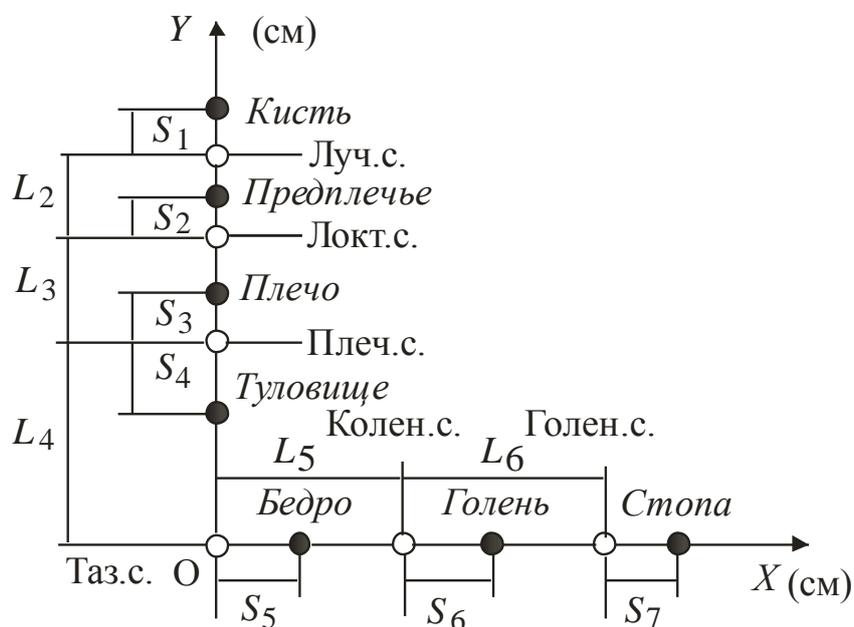


Рис. 13. Обозначения расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс через символическую запись S_i

6. Обозначить на рисунке координаты центра масс сегментов через символическую запись X_{c_i}, Y_{c_i} . (рис. 14).

Здесь X_c, Y_c обозначает координату центра масс сегмента по осям Ox, Oy декартовой системы координат, i – номер сегмента

Обозначения координат центра масс сегмента:

X_{c_1}, Y_{c_1} – координата центра масс кисти по осям Ox, Oy .

X_{c_2}, Y_{c_2} – координата центра масс предплечья по осям Ox, Oy .

X_{c_3}, Y_{c_3} – координата центра масс плеча по осям Ox, Oy .

X_{c_4}, Y_{c_4} – координата центра масс туловища по осям Ox, Oy .

X_{c_5}, Y_{c_5} – координата центра масс бедра по осям Ox, Oy .

X_{c_6}, Y_{c_6} – координата центра масс голени по осям Ox, Oy .

X_{c_7}, Y_{c_7} – координата центра масс стопы по осям Ox, Oy .

X_{c_8}, Y_{c_8} – координата центра масс головы по осям Ox, Oy .

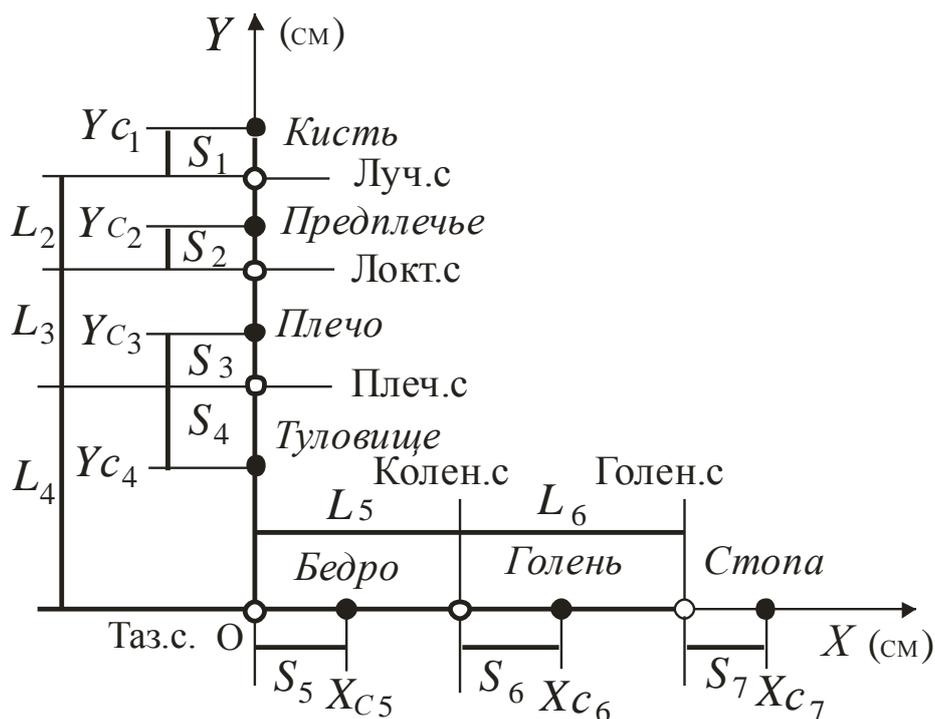


Рис. 14. Обозначения координат центра масс сегментов через символическую запись X_{c_i}, Y_{c_i}

7. Обозначить на рисунке координаты суставов сегментов через символическую запись X_i, Y_i . Здесь X, Y обозначает координату центра масс сегмента, i – номер сегмента (рис. 15).

Обозначения координат суставов:

X_1, Y_1 – координата лучезапястных суставов по осям Ox, Oy .

X_2, Y_2 – координата локтевых суставов по осям Ox, Oy .

X_3, Y_2 – координата плечевых суставов по осям Ox, Oy .

X_4, Y_4 – координата тазобедренных суставов по осям Ox, Oy .

X_5, Y_5 – координата коленных суставов по осям Ox, Oy .

X_6, Y_6 – координата голеностопных суставов по осям Ox, Oy .

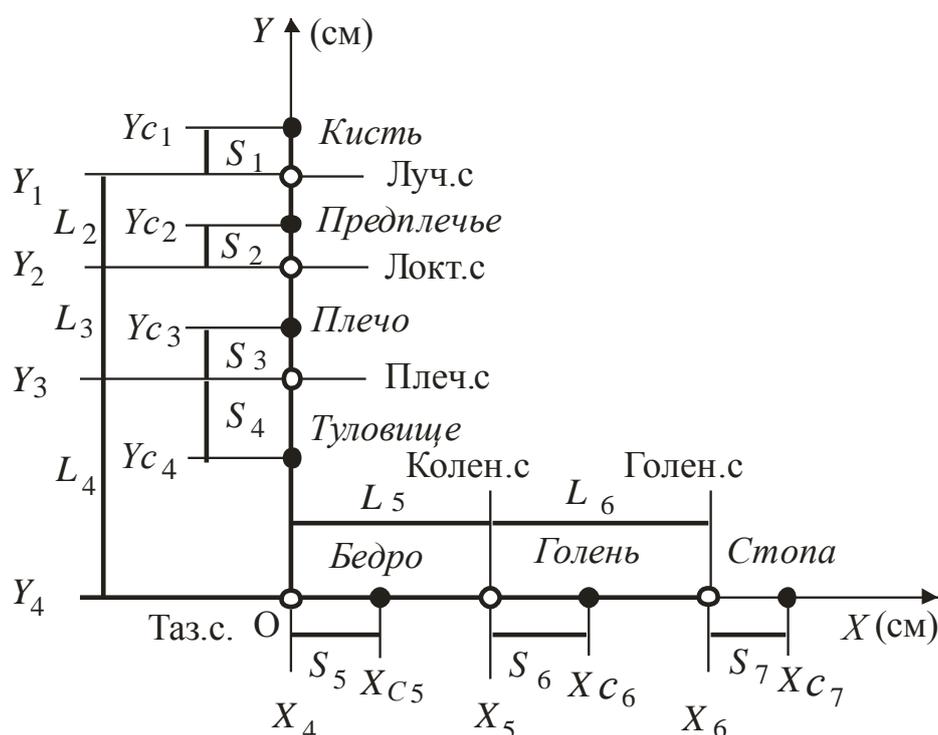


Рис. 15. Обозначения координаты суставов через символическую запись X_i

8. Осталось определить координату центра масс головы по оси Ox . Для этого от плечевых суставов в сторону кистей рук отложим расстояние S_8 , равное расстоянию от антропометрической точки головы до его центра масс. Как обычно отметим положение центра масс головы на оси Oy жирной точкой (рис. 16), а координаты центра масс головы по осям Ox, Oy запишем в виде X_{c8}, Y_{c8} .

9. Подготовить таблицу данных длин сегментов и расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс (табл. 2). Обозначения в таблице уже известны, поэтому они не требуют специальных пояснений.

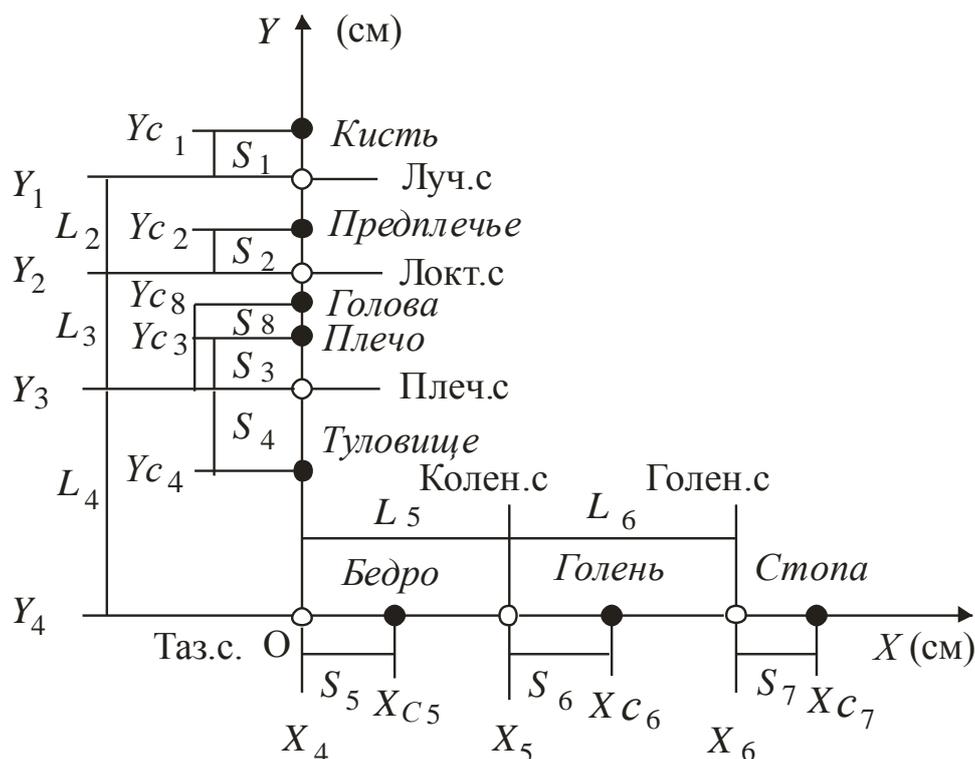


Рис. 16. Кинематическая схема опорно-двигательного аппарата тела человека в положении «вис углом на гимнастической стенке»

Т а б л и ц а 2

Длины сегментов (L_i), расстояние (S_i) от антропометрической точки сегмента до его центра масс, координаты суставов (X_i, Y_i) и центра масс сегментов (X_{ci}, Y_{ci}) по осям Ox, Oy декартовой системы координат

1	2	3	4	5	6	7	8
№ п/п	Сегмент	L_i	S_i	X_i	X_{ci}	Y_i	Y_{ci}
1	Кисть						
2	Предплечье						
3	Плечо						
4	Туловище						
5	Бедро						
6	Голень						
7	Стопа						
8	Голова						

Задание

1. Изучить ход лабораторной работы и последовательно выполнить все ее этапы (с 1-го по 8-й пункты).

2. Используя измеренные при выполнении 1-й лабораторной работы данные о длинах сегментов (L_i) и вычисленные значения, при выполнении 2-й лабораторной работы, расстояния от антропометрической точки сегмента до его центра масс (S_i) вписать их в табл. 2.

3. Пользуясь табл. 2 (колонки 3, 4) и рис. 16 определить координаты суставов (X_i) и вписать их в табл. 2 (колонка 5).

4. Пользуясь табл. 2 (колонки 4, 5) и рис. 16 определить координаты центра масс сегментов по оси Ox (X_{c_i}) и вписать их в табл. 2 (колонка 6).

5. Пользуясь рис. 16 определить координаты суставов по оси Oy (Y_i) и вписать их в табл. 2 (колонка 7).

6. Пользуясь рис. 16 определить координаты центра масс сегментов по оси Oy (Y_{c_i}) и вписать их в табл. 2 (колонка 8).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Тема: Определение координат общего центра масс (ОЦМ) тела человека в различных положениях.

Цель: Научиться определять координаты ОЦМ тела человека в различных положениях.

Задачи: Определить координаты общего центра масс тела человека в положениях:

- 1) лежа на спине – руки вверх.
- 2) вис углом на гимнастической стенке.

Инструменты и оборудование: Тетрадь для лабораторных работ, карандаш, резинка, ручка или фломастер, линейка, микрокалькулятор.

Ход работы

Решение задачи 1 – (2 часа)

1. Нарисовать в декартовой системе координат кинематическую схему опорно-двигательного аппарата тела человека, в положении, соответствующем решению задачи 1 (рис.1). Ввести в схему принятые в лабораторной работе 3 соответствующие обозначения для координат центра масс сегментов.

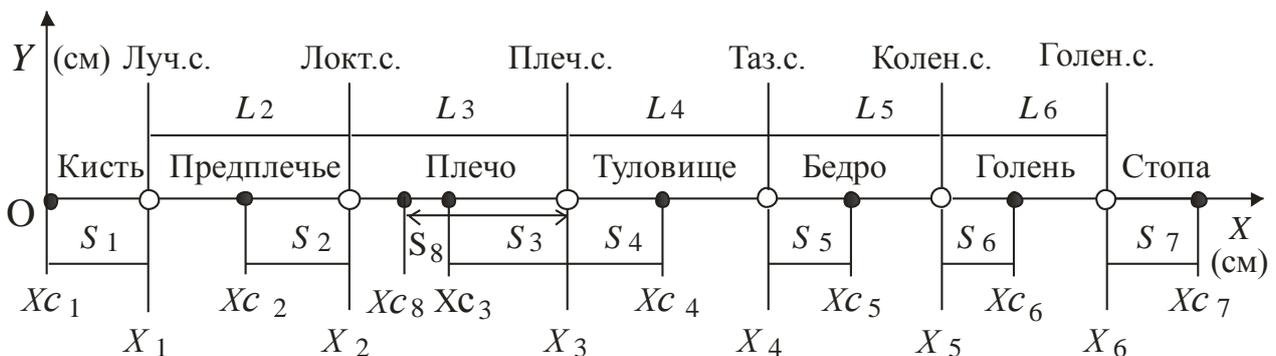


Рис. 1. Кинематическая схема опорно-двигательного аппарата тела человека в положении «лежа на спине – руки вверх»

2. Упростим рисунок для лучшего восприятия, оставив только обозначения координат центра масс сегментов и суставов (рис. 2).

3. Выписать, как показано ниже в таблице 1, в качестве исходных данных значения веса каждого сегмента (лабораторная работа 3) и координату его центра масс по оси Ox (лабораторная работа 3).

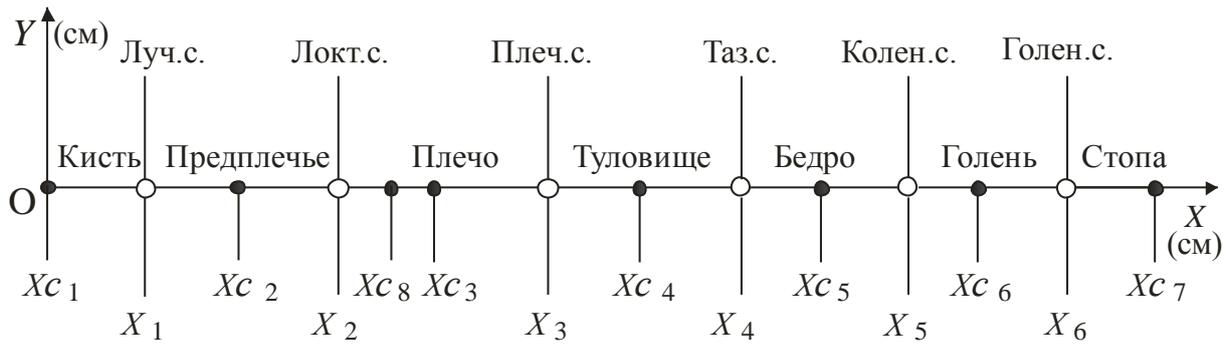


Рис. 2. Обозначения координат центра масс суставов на оси Ox

Т а б л и ц а 1

Вес сегментов (P_i), координата центра масс сегментов (X_{c_i}) по оси Ox
декартовой системы координат

1	2	3	4	5
№ п/п	Сегмент	P_i	X_{c_i}	$P_i X_{c_i}$
1	Кисть			
2	Предплечье			
3	Плечо			
4	Туловище			
5	Бедро			
6	Голень			
7	Стопа			
8	Голова			
9	$\sum_{i=1}^8 P_i X_{c_i}$			
10	Координата ОЦМ по оси Ox			

Записать в колонку 3 табл. 1 значения веса сегмента, а в колонку 4 координату центра масс сегмента по оси Ox .

4. Формульное выражение координаты ОЦМ системы тел в декартовой системе координат имеет вид

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^N X_{c_i} P_i}{\sum_{i=1}^N P_i} ; \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^N Y_{c_i} P_i}{\sum_{i=1}^N P_i} . \quad (1)$$

Здесь X_c – координата ОЦМ системы тел по оси Ox ; Y_c – координата ОЦМ системы тел по оси Oy ; X_{c_i} – координата центра масс i -го тела по оси Ox ; Y_{c_i} – ко-

ордината центра масс i -го тела по оси Oy ; P_i – вес i -го тела; N – количество тел.

Для биомеханической системы вместо тел имеем сегменты тела человека, остальные обозначения остаются без изменений. В табл. 1 не приведены колонки для координаты сегментов по оси Oy . Из рис. 1, 2 видно, что их значения равны нулю и поэтому координата ОЦМ тела человека по оси Oy также равняется нулю. И здесь же следует учесть, что сумма весов отдельных сегментов (знаменатель в формульных выражениях) равняется весу тела человека, а отдельные сегменты имеют парное строение и их вес необходимо удваивать (кисть, предплечье, плечо, бедро, голень, стопа).

5. Вычислить последовательно для каждого сегмента произведение его веса на координату центра масс данного сегмента по оси Ox и записать результат в колонку 5 табл. 1. В развернутой записи для каждого из сегментов это имеет вид

№ п/п	Сегмент	$P_i \cdot X_{ci}$
1	Кисть	$P_1 \cdot X_{c1} =$
2	Предплечье	$P_2 \cdot X_{c2} =$
3	Плечо	$P_3 \cdot X_{c3} =$
4	Туловище	$P_4 \cdot X_{c4} =$
5	Бедро	$P_5 \cdot X_{c5} =$
6	Голень	$P_6 \cdot X_{c6} =$
7	Стопа	$P_7 \cdot X_{c7} =$
8	Голова	$P_8 \cdot X_{c8} =$

6. В развернутой записи уравнение координаты ОЦМ биомеханической системы по оси Ox для рассматриваемого случая имеет вид

$$X_c = \frac{P_1 X_{c1} + P_2 X_{c2} + P_3 X_{c3} + P_4 X_{c4} + P_5 X_{c5} + P_6 X_{c6} + P_7 X_{c7} + P_8 X_{c8}}{P}. \quad (2)$$

Здесь P – вес тела человека. Поэтому одним из заключительных этапов определения положения ОЦМ тела человека для настоящей задачи является операция сложения всех чисел колонки 5 табл. 1 и запись результата в эту же колонку в строке 9. Далее полученный результат поделить на вес тела и окончательно получим координату ОЦМ тела человека по оси Ox в декартовой си-

стеме координат в положении «Лежа на спине – руки вверх». Записать результат вычислений в колонку 5 табл. 1, строка 10.

Решение задачи 2 – (2 часа)

1. Нарисовать в декартовой системе координат кинематическую схему опорно-двигательного аппарата тела человека, в положении, соответствующем решению задачи 2 (рис. 3). Ввести в схему принятые в лабораторной работе 3 соответствующие обозначения для координат центра масс сегментов.

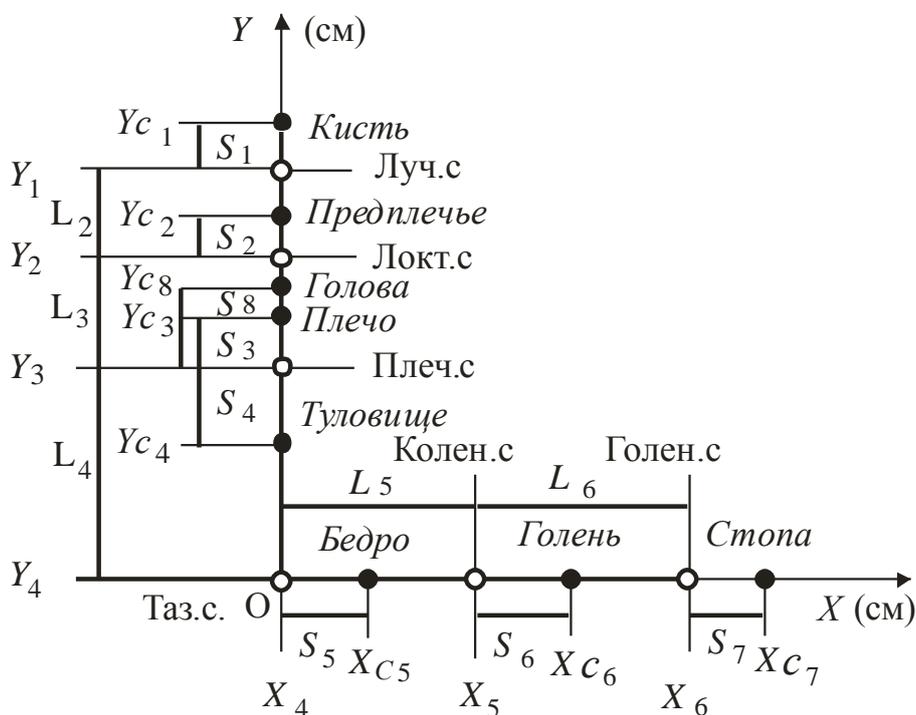


Рис. 3. Кинематическая схема опорно-двигательного аппарата тела человека в положении «Вис углом на гимнастической стенке»

2. Упростим рисунок для лучшего восприятия, оставив только обозначения координат центра масс сегментов и суставов (рис. 4).

3. Выписать, как показано ниже в таблице 2, в качестве исходных данных значения веса каждого сегмента (лабораторная работа № 3) и координату его центра масс по оси Ox и оси Oy декартовой системы координат (лабораторная работа № 3).

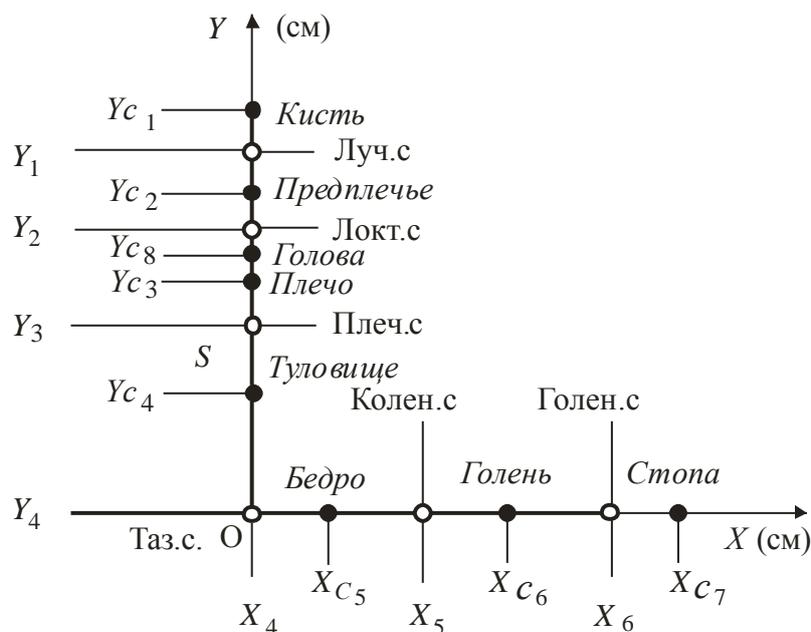


Рис. 4. Обозначения координат центра масс суставов на оси Ox , Oy

Т а б л и ц а 2

Вес сегментов (P_i), координата центра масс сегментов (X_{ci}) по оси Ox , (Y_{ci}) по оси Oy декартовой системы координат

1	2	3	4	5	6	7
№ п/п	Сегмент	P_i	X_{ci}	$P_i \cdot X_{ci}$	Y_{ci}	$P_i \cdot Y_{ci}$
1	Кисть		0			
2	Предплечье		0			
3	Плечо		0			
4	Туловище		0			
5	Бедро				0	
6	Голень				0	
7	Стопа				0	
8	Голова		0			
9	Формулы	$\sum_{i=1}^8 P_i X_{ci}$			$\sum_{i=1}^8 P_i Y_{ci}$	

Записать в колонку 3 табл. 2 значения веса сегмента, в колонку 4 координату центра масс сегмента по оси Ox , а в колонку 6 координату центра масс сегмента по оси Oy . Так как продольная ось некоторых сегментов расположена

га оси Ox или оси Oy , то их соответствующие координаты имеют нулевые значения, что сразу можно и вписать в таблицу 2.

4. Формульное выражение координаты ОЦМ системы тел в декартовой системе координат имеет вид (система уравнений 1).

5. Вычислить последовательно для каждого сегмента произведение его веса на координату центра масс данного сегмента по оси Ox и записать результат в колонку 5 табл. 2. Это же выполнить и для оси Oy , с записью результатов вычислений в колонку 7. Учитывая, что координаты центра масс некоторых сегментов по оси Ox или Oy имеют нулевые значения, то естественно, что и их произведение на вес соответствующего сегмента также равно нулю. В развернутой записи для каждого из сегментов это имеет вид

№ п/п	Сегмент	$P_i \cdot X_{ci}$	$P_i \cdot Y_{ci}$
1	2	5	7
1	Кисть	$P_1 \cdot X_{c1} = 0$	$P_1 \cdot Y_{c1} =$
2	Предплечье	$P_2 \cdot X_{c2} = 0$	$P_2 \cdot Y_{c2} =$
3	Плечо	$P_3 \cdot X_{c3} = 0$	$P_3 \cdot Y_{c3} =$
4	Туловище	$P_4 \cdot X_{c4} = 0$	$P_4 \cdot Y_{c4} =$
5	Бедро	$P_5 \cdot X_{c5} =$	$P_5 \cdot Y_{c5} = 0$
6	Голень	$P_6 \cdot X_{c6} =$	$P_6 \cdot Y_{c6} = 0$
7	Стопа	$P_7 \cdot X_{c7} =$	$P_7 \cdot Y_{c7} = 0$
8	Голова	$P_8 \cdot X_{c8} = 0$	$P_8 \cdot Y_{c8} =$

6. В развернутой записи уравнение координаты ОЦМ биомеханической системы по оси Oy и оси Ox для рассматриваемого случая имеет вид

$$Y_c = \frac{P_1 Y_{c1} + P_2 Y_{c2} + P_3 Y_{c3} + P_4 Y_{c4} + P_5 Y_{c5} + P_6 Y_{c6} + P_7 Y_{c7} + P_8 Y_{c8}}{P}.$$

$$X_c = \frac{P_1 X_{c1} + P_2 X_{c2} + P_3 X_{c3} + P_4 X_{c4} + P_5 X_{c5} + P_6 X_{c6} + P_7 X_{c7} + P_8 X_{c8}}{P}. \quad (3)$$

Здесь P – вес тела человека. Поэтому одним из заключительных этапов определения положения ОЦМ тела человека для настоящей задачи является

операция сложения всех чисел колонки 5 и колонки 7 табл. 2 и запись результата в эти же колонки в строке 9. Далее полученный результат поделить на вес тела и окончательно получим координату ОЦМ тела человека по оси Ox и оси Oy в декартовой системе координат в положении «Вис углом на гимнастической стенке». Записать результат вычислений в колонку 5 и колонку 7 табл. 2.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Тема: Центральный момент инерции сегментов тела человека.

Цель: Освоить расчетные методы биомеханики, применяемые для определения геометрии масс тела человека.

Задачи: Научиться определять моменты инерции звеньев тела человека.

Оборудование: Микрокалькуляторы.

Пояснение

Одним из фундаментальных понятий в теории вращения тел является момент инерции. Мерой инертности тела в поступательных движениях является его масса, а во вращательных – момент инерции. Момент инерции дает представление о распределении массы звена относительно заданной оси и равен сумме произведений масс всех материальных точек на квадраты их расстояний от оси вращения

$$J = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (1)$$

где J – момент инерции; m_i – масса i -го сегмента; r_i – расстояние от центра масс i -го сегмента до оси вращения; N – количество сегментов.

Если разделить стержень на n частей (рис.1), то его момент инерции относительно оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно плоскости чертежа, равен

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 + m_6 r_6^2 \quad (2)$$

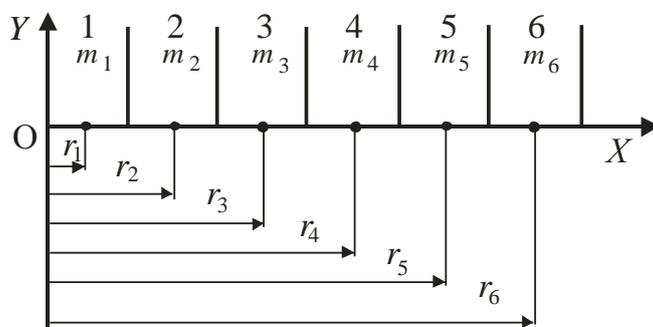


Рис.1. Определение момента инерции стержня при разделении его на n частей

Момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела, называется центральным.

Звенья человека можно лишь с большим приближением представить в виде стержней, и определение центрального момента инерции сегментов тела по формуле (2) приводит к значительным количественным погрешностям.

Исследования, выполненные в лаборатории биомеханики ГЦОЛИФК (В.М. Зациорский и др., 1975; В.Н. Селуянов, 1978), позволили разработать радиоизотопный метод прижизненного определения масс-инерционных характеристик сегментов тела человека. Погрешность используемого метода не превышает 3%. В результате исследования с участием 100 испытуемых были определены коэффициенты (B_i) в уравнениях множественной регрессии вида

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2, \quad (3)$$

позволяющие вычислять центральные моменты инерции сегментов тела по весу (X_1) и длине (X_2) тела. Значения искоемых коэффициентов приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты уравнений множественной регрессии для вычисления главного центрального момента инерции сегментов тела относительно фронтальной оси, кг·см²

Сегмент	B_0	B_1	B_2
Стопа	-97,09	0,414	0,614
Голень	-1152,00	4,594	6,815
Бедро	-3960,00	32,02	19,24
Кисть	-13,68	0,088	0,092
Предплечье	-67,90	0,855	0,376
Плечо	-232,00	1,525	1,343
Голова	-112,00	1,430	1,730

Пример

Вес испытуемого – 80 кг, рост – 170 см. В этом случае момент инерции бедра относительно оси, проходящей через его центр масс, равен $1872,4 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$ (центральный момент инерции)

$$J_C = -3960,00 + 32,02 \cdot 80 + 19,24 \cdot 170.$$

Задание

1. Определить рост и вес испытуемого.
2. Подготовить рабочую таблицу для записи результатов вычислений (табл. 2).
3. Пользуясь таблицей 1 и формулой (4), вычислить центральные моменты инерции звеньев тела.
4. Записать полученные результаты в колонку 5 табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Рабочая таблица для определения
центрального момента инерции (J_C) сегментов тела человека

№ п/п	Сегмент	V_0	V_1	V_2	J_C
	1	2	3	4	5
1	Стопа	-97,09	0,414	0,614	
2	Голень	-1152,00	4,594	6,815	
3	Бедро	-3960,00	32,02	19,24	
4	Кисть	-13,68	0,088	0,092	
5	Предплечье	-67,90	0,855	0,376	
6	Плечо	-232,00	1,525	1,343	
7	Голова	-112,00	1,430	1,730	
8	Туловище	Вычисляется по формуле $J_C = mL^2/12$			

Пояснение: L – длина туловища (см). Масса туловища (m) определяется по результатам предыдущей работы в соответствии с уравнением $m=P/g$, где P – вес туловища, g – ускорение свободного падения.

Контрольные вопросы

1. Что является мерой инертности тела во вращательных движениях?
2. От каких количественных показателей зависит величина момента инерции тела?
3. Что понимается под центральным моментом инерции?
4. Каким образом можно определить центральный момент инерции звеньев тела человека?
5. Как определить момент инерции тела относительно оси, расположенной на произвольном расстоянии от его центра масс, если известен центральный момент инерции звеньев тела, а заданная ось перпендикулярна продольной оси тела?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Тема: Момент инерции тела человека относительно оси вращения в различных положениях .

Цель: Научиться определять момент инерции тела человека относительно оси вращения в различных положениях.

Задачи: Определить момент инерции тела человека относительно грифа перекладины в положениях:

- 1) вис на перекладине.
- 2) вис углом на перекладине.

Инструменты и оборудование: Тетрадь для лабораторных работ, карандаш, резинка, ручка или фломастер, линейка, микрокалькулятор.

Пояснение: если известен момент инерции тела относительно какой-либо оси, то можно определить и его момент инерции относительно параллельной оси, расположенной на произвольном расстоянии от первой. С этой целью можно воспользоваться формулой:

$$J_0 = J_C + mr^2 ,$$

где J_0 – момент инерции тела относительно оси вращения; J_C – центральный момент инерции тела; m – масса тела; r – расстояние от оси вращения до центра масс тела.

Ход работы

Решение задачи 1 – (2 часа)

1. Нарисовать в декартовой системе координат кинематическую схему опорно-двигательного аппарата тела человека, в положении вися на перекладине (рис.1). Поместить центр масс кистей рук и гриф перекладины в начало системы координат. Ввести в схему, принятые в лабораторной работе 3, соответствующие обозначения для координат центра масс сегментов.

2. Уравнения для определения момента инерции системы тел имеют вид

$$J_o = \sum_{i=1}^N Jc_i + \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 . \quad (1)$$

Здесь J_o – момент инерции системы тел относительно оси вращения O ; Jc_i – центральный момент инерции i -го тела; m_i – масса i -го тела; r_i – расстояние от центра масс i -го тела до оси вращения O ; i – порядковый номер тела; N – количество тел в системе.

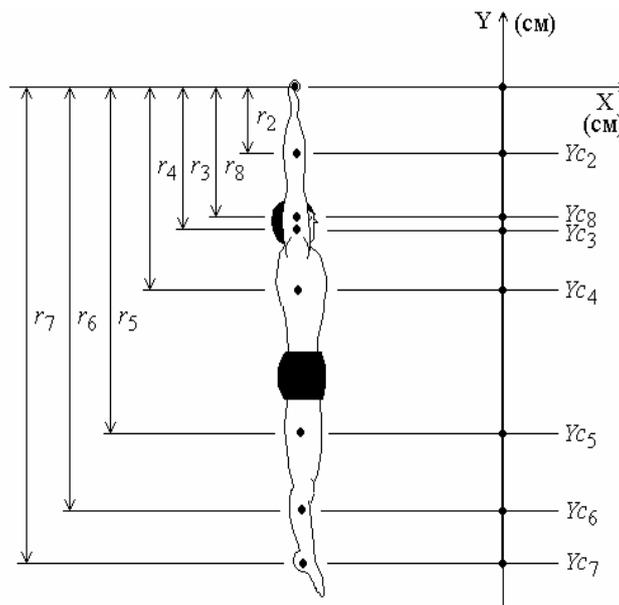


Рис. 1. Кинематическая схема опорно-двигательного аппарата тела человека в положении «Вис на перекладине»

В развернутой записи, для рассматриваемой 8-ми звенной биомеханической системы, уравнения, определяющие момент инерции системы тел относительно оси вращения O , находятся из выражения

$$J_o = Jc_1 + Jc_2 + Jc_3 + Jc_4 + Jc_5 + Jc_6 + Jc_7 + Jc_8 + \\ + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 + m_6 r_6^2 + m_7 r_7^2 + m_8 r_8^2 . \quad (2)$$

Здесь следует учесть, что r_i^2 находится из выражения

$$r_i^2 = Xc_i^2 + Yc_i^2 .$$

Здесь r_i^2 – квадрат расстояния от центра масс i -го тела до оси вращения O ; X_{ci}^2 – квадрат расстояния от центра масс i -го тела до оси вращения по оси Ox ; Y_{ci}^2 – квадрат расстояния от центра масс i -го тела до оси вращения по оси Oy .

Так как X_{ci} , Y_{ci} определены в ранее выполненной лабораторной работе, то их вычисление в данном случае не обязательно, а достаточно их взять из предыдущей лабораторной работы и затем подсчитать последовательно X_{ci}^2 , Y_{ci}^2 , а затем и r_i^2 .

3. Выписать, как показано ниже в табл. 1, в качестве исходных данных значения веса каждого сегмента (лабораторная работа 1) и координату его центра масс по оси Ox и оси Oy (лабораторная работа 2).

Т а б л и ц а 1

Вес сегментов (P_i), координата центра масс сегментов (X_{ci}) по оси Ox и (Y_{ci}) по оси Oy декартовой системы координат

1	2	3	4	5	6	7	8
№ п/п	Сегмент	P_i	m_i	X_{ci}	X_{ci}^2	Y_{ci}	Y_{ci}^2
1	Кисть						
2	Предплечье						
3	Плечо						
4	Туловище						
5	Бедро						
6	Голень						
7	Стопа						
8	Голова						

Записать в колонку 3 табл. 1 значения веса сегмента, в колонку 5 координату центра масс сегмента по оси Ox , в колонку 7 координату центра масс сегмента по оси Oy . Так как продольная ось сегментов совпадает с осью Oy декартовой системы координат, то все координаты центра масс сегментов по оси Ox равны нулю, что и вписать в колонку 5 табл. 1. Кроме этого следует учитывать, что тело спортсмена расположено в минусовой области числовой оси Oy . Поэтому все значения координат центра масс сегментов по оси Oy (ось Ox , лабораторная работа №3) берутся со знаком «-» и записываются в колонку 7 табл. 1.

4. Вычислить массу отдельных сегментов, а результаты вычислений вписать в колонку 4 табл. 1. Формульное выражение массы i – го сегмента (m_i) в технической системе мер и весов имеет вид

$$m_i = \frac{P_i}{g}. \quad (1)$$

Здесь: g – ускорение свободно падающего тела, равное $9,806 \text{ м/с}^2$.

И здесь же следует учесть, отдельные сегменты имеют парное строение и их массу необходимо удваивать (кисть, предплечье, плечо, бедро, голень, стопа).

5. Подготовить табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Биомеханические характеристики сегментов тела человека

1	2	3	4	5	6
№ п/п	Сегмент	Jc_i	r_i^2	$m_i \cdot r_i^2$	$Jc_i + m_i \cdot r_i^2$
1	Кисть				
2	Предплечье				
3	Плечо				
4	Туловище				
5	Бедро				
6	Голень				
7	Стопа				
8	Голова				

В колонку 3 табл. 2 вписать карандашом значение центрального момента инерции сегментов, вычисленные в предыдущей лабораторной работе. Далее, каждое из значений центрального момента инерции разделить на $9,806$ (для перевода в техническую систему мер и весов), а затем, учитывая, что отдельные сегменты имеют парное строение и их центральный момент инерции необходимо умножить на два (кисть, предплечье, плечо, бедро, голень, стопа). После выполнения всех этих операций стереть карандашную запись и вписать ручкой величину центрального момента инерции сегмента в колонку 3 табл. 2.

6. Вычислить для каждого из сегментов квадрат расстояния от его центра масс до оси вращения (гриф перекладины) по формуле

$$r_i^2 = Xc_i^2 + Yc_i^2.$$

Ввести в схему принятые в лабораторной работе 3 соответствующие обозначения для координат центра масс сегментов.

2. Этот этап работы полностью соответствует этому же этапу работы решения первой задачи, так как уравнения, по которым определяется момент инерции системы тел относительно заданной оси вращения не меняются в зависимости от изменения конфигурации биомеханической системы.

3. Выписать, как показано ниже в табл. 3, в качестве исходных данных значения веса каждого сегмента (лабораторная работа 3) и координату его центра масс по оси Ox и оси Oy (лабораторная работа 3).

Записать в колонку 3 табл. 1 значения веса сегмента, в колонку 5 координату центра масс сегмента по оси Ox , в колонку 7 координату центра масс сегмента по оси Oy . Так как продольная ось сегментов 1-4, 8 совпадает с осью Oy декартовой системы координат, то все координаты центра масс сегментов 1-4, 8 по оси Ox равны нулю, что и вписать в колонку 7 табл. 3. Продольная ось сегментов 5-7 совпадает с осью Ox декартовой системы координат, поэтому координаты центра масс сегментов 5-7 по оси Ox равны нулю, что и вписать в колонку 5 табл. 3.

Здесь следует учитывать, что координаты центра масс сегментов под номерами 1-4, 8 по оси Oy совпадают с соответствующими координатами из табл. 1 лабораторной работы №6. Для сегментов же 5, 6, 7 координата центра масс по оси Oy равна координате тазобедренного сустава (лабораторная работа №3). Координата центра масс этих сегментов по оси Ox совпадает с аналогичными координатами из второй части лабораторной работы №3.

4. Вычислить массу отдельных сегментов, а результаты вычислений вписать в колонку 4 табл. 3. Напомним, что формульное выражение массы i – го сегмента (m_i) в технической системе мер и весов имеет вид

$$m_i = \frac{P_i}{g}.$$

Здесь g – ускорение свободно падающего тела, равное $9,806 \text{ м/с}^2$.

И здесь же следует учесть, отдельные сегменты имеют парное строение и их массу необходимо удваивать (кисть, предплечье, плечо, бедро, голень, стопа).

Т а б л и ц а 3

Вес сегментов (P_i), координата центра масс сегментов (X_{c_i}) по оси Ox и (Y_{c_i}) по оси Oy декартовой системы координат

1	2	3	4	5	6	7	8
№ п/п	Сегмент	P_i	m_i	X_{c_i}	$X_{c_i}^2$	Y_{c_i}	$Y_{c_i}^2$
1	Кисть						
2	Предплечье						
3	Плечо						
4	Туловище						
5	Бедро						
6	Голень						
7	Стопа						
8	Голова						

5. Подготовить табл. 4.

В колонку 3 табл. 4 вписать карандашом значение центрального момента инерции сегментов, вычисленные в предыдущей лабораторной работе. Далее, каждое из значений центрального момента инерции разделить на 9,806 (для перевода в техническую систему мер и весов), а затем, учитывая, что отдельные сегменты имеют парное строение и их центральный момент инерции необходимо умножить на два (кисть, предплечье, плечо, бедро, голень, стопа).

Т а б л и ц а 4

Биомеханические характеристики сегментов тела человека

1	2	3	4	5	6
№ п/п	Сегмент	J_{c_i}	r_i^2	$m_i \cdot r_i^2$	$J_{c_i} + m_i \cdot r_i^2$
1	Кисть				
2	Предплечье				
3	Плечо				
4	Туловище				
5	Бедро				
6	Голень				
7	Стопа				
8	Голова				

После выполнения всех этих операций стереть карандашную запись и вписать ручкой величину центрального момента инерции сегмента в колонку 3 табл. 4.

6. Вычислить для каждого из сегментов квадрат расстояния от его центра масс до оси вращения (гриф перекладины) по формуле

$$r_i^2 = Xc_i^2 + Yc_i^2 .$$

Данные для квадрата расстояния проекции центра масс сегмента на ось Ox (Xc_i^2) и ось Oy (Yc_i^2) взять из табл. 3, колонки 6 и 8 соответственно.

7. Вычислить последовательно для каждого сегмента произведение его массы на квадрат расстояния до оси вращения. Для этого надо перемножить массу сегмента (колонка 4 табл. 2) на данные колонки 4 табл. 4 (для каждой из строк таблицы) и вписать полученные значения в колонку 5 табл. 4.

8. В колонке 6 табл. 6 содержатся результаты сложения данных строковых элементов колонок 3 и 5.

И на заключительном этапе выполнения лабораторной работы, в соответствии с уравнениями 1,2 необходимо результаты колонки 6 табл. 4 сложить построчно. Полученная сумма и будет являться значением момента инерции биомеханической системы относительно оси вращения (гриф перекладины) для положения гимнаста: «вис углом на гимнастической стенке».

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Тема: Определение угловой скорости звеньев тела человека.

Цель: Научиться определять угловую скорость звеньев тела человека при выполнении спортивных упражнений.

Задачи: Определить угловую скорость звеньев тела человека при выполнении гимнастических упражнений:

- 1) большой оборот назад на перекладине.
- 2) большой оборот вперед на перекладине.

Инструменты и оборудование: Тетрадь для лабораторных работ, карандаш, резинка, ручка или фломастер, линейка, микрокалькулятор.

Ход работы

Решение задачи 1 – (4 часа)

Угловая скорость и ускорение звеньев тела

Первая и вторая производная от обобщенных координат (углы наклона звеньев биомеханической системы к оси Ox) по времени, заданных в табличном виде, определяются из симметричных конечно-разностных отношений

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2h}, \quad \ddot{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2}, \quad (1)$$

где $\dot{\varphi}_i$, $\ddot{\varphi}_i$ – приближенные значения первой и второй производной от обобщенных координат φ_i по времени в момент времени $t = t_i$, i – номер кинокадра, h – интервал времени между двумя ближайшими кинокадрами, определяемый в соответствии с уравнением

$$h = \frac{1}{k}, \quad (2)$$

где k – частота киносъемки.

Учитывая, что в механике угловая скорость измеряется в рад/с, формулы для определения угловой скорости и ускорения звеньев тела на основании равенств (1) примут вид

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\pi(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{360h}, \quad \ddot{\varphi}_i = \frac{\pi(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})}{180h^2}. \quad (3)$$

Здесь π – символ числа "пи". Для первой и конечной точки траектории угловая скорость и угловое ускорение звеньев тела спортсмена вычисляются по формулам Милна.

Кинетограмма второй половины большого оборота назад на перекладине показана на рис. 1.

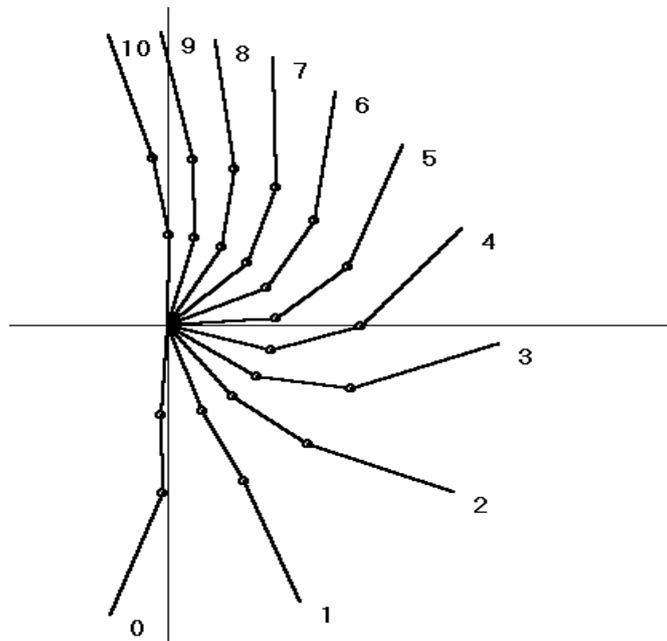


Рис. 1. Кинетограмма второй половины большого оборота назад на перекладине

1. Для вычисления угловой скорости звеньев тела при выполнении любого спортивного упражнения необходимо знать значения обобщенных координат биомеханической системы на всей траектории движения. Для этого по выполненному промеру, транспортом определяют угол наклона звеньев биомеханической системы к оси Ox для каждого кинокадра упражнения и измеренные значения обобщенных координат заносят в таблицу. Определение обобщенных координат биосистемы для исследуемого упражнения выполняется следующим образом.

Допустим, для первого кинокадра выполняемого упражнения (рис. 2, Б) построена кинетограмма (рис. 2, А).

Для определения угла наклона звеньев биомеханической системы к оси Ox необходимо от каждого сустава провести влево и вправо линии, параллельные оси Ox . Направление угла отсчитывается от положительной области числовой оси Ox против хода часовой стрелки. Величина угла изменяется от 0° до 360° , а также может изменяться в диапазоне $360^\circ - 720^\circ$ и т.д. Величина угла наклона звена к оси Ox измеряется транспортиром и записывается в таблицу обобщенных координат, в которой колонки обозначают номер звена, а строки – номер кинокадра.

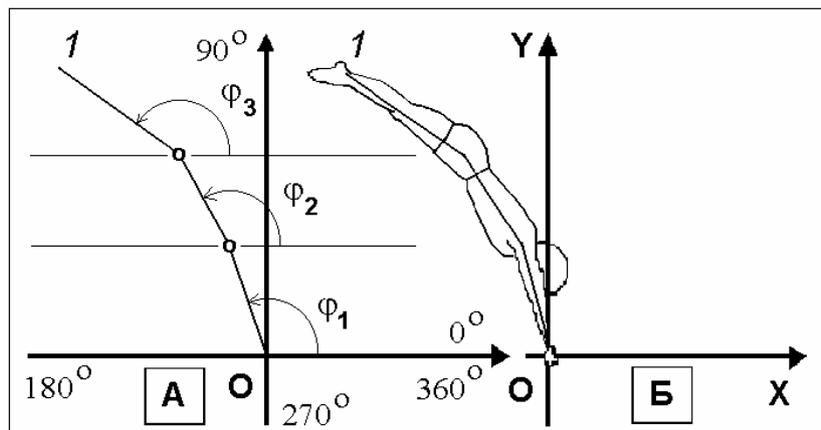


Рис. 2. Считывание обобщенных координат (φ_i) в первом кинокадре (1) кинетограммы (А) по материалам киносъемки (Б)

2. Подготовить таблицу обобщенных координат для трехзвенной биомеханической системы (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Таблица обобщенных координат (φ_i) трехзвенной биомеханической системы на всей траектории движения

№ кинокадра	φ_1	φ_2	φ_3
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Для каждого номера кинокадра вписать в таблицу значения обобщенных координат для первого звена – φ_1 , для второго звена – φ_2 и для третьего звена – φ_3 .

3. Дополнить табл. 1 тремя колонками справа (табл. 2).

4. В колонке 5 будут записаны расчетные данные разности обобщенных координат первого звена по кинокадрам: для $i+1$ кинокадра и $i-1$ кинокадра, где i – номер кинокадра.

В колонке 6 будут записаны расчетные данные разности обобщенных координат второго звена по кинокадрам: для $i+1$ кинокадра и $i-1$ кинокадра, где i – номер кинокадра.

Т а б л и ц а 2

Промежуточная таблица для расчета угловой скорости

1	2	3	4	5	6	7
№ кинокадра	φ_1	φ_2	φ_3	φ_1 $\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}$	φ_2 $\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}$	φ_3 $\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}$
1	365					
2	378			29		
3	394			41		
4	419			36		
5	428			16		
6	435					

В колонке 7 будут записаны расчетные данные разности обобщенных координат третьего звена по кинокадрам: для $i+1$ кинокадра и $i-1$ кинокадра, где i – номер кинокадра.

К примеру, для первого звена имеется таблица чисел изменения обобщенных координат биосистемы на всей траектории движения (табл. 2, колонка 2). Допустим $i=2$, тогда $i+1=3$, а $i-1=1$. Следовательно, $\varphi_{i+1}=394$ (табл. 2, колонка 2, строка 3); $\varphi_{i-1}=365$ (табл. 2, колонка 2, строка 1). Разница $\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1} = 394 - 365 = 29$ записывается в строку 2 (так как $i=2$) колонки 6 (табл. 2).

Увеличим i на 1. Тогда i станет равным 3, $i+1=4$, а $i-1=2$. Следовательно, $\varphi_{i+1}=419$ (табл. 2, колонка 2, строка 3); $\varphi_{i-1}=378$ (табл. 2, колонка 2, строка 2). Разница $\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1} = 419 - 378 = 41$ записывается в строку 3 (так как $i=3$) колонки 6 (табл. 2).

Снова увеличим i на 1. На это раз i станет равным 4, $i+1=5$, а $i-1=3$. Следовательно, $\varphi_{i+1}=419$ (табл. 2, колонка 2, строка 5); $\varphi_{i-1}=378$ (табл. 2, колонка 2, строка 3). Разница $\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1} = 428 - 394 = 36$ записывается в строку 4 (так как $i=4$) колонки 6 (табл. 2).

И этот цикл повторяется до тех пор, пока $i+1$ не станет больше, чем количество кинокадров упражнения. Затем переходят к расчету второго звена и т.д.

5. Подготовить табл. 3, в которую будут занесены вычисленные значения угловой скорости звеньев тела.

В соответствии с уравнениями (3) каждую строчку колонок 5, 6, 7 (табл. 2) необходимо умножить на число π и разделить на $360h$, где h определяется из уравнения 2. Полученный результат вписать в соответствующую строчку колонки 2, 3 или 4 табл. 3. Это и есть угловая скорость звеньев тела.

Таблица 3

Угловая скорость звеньев тела ($\dot{\varphi}_i$)

№ кинокадра	$\dot{\varphi}_1$	$\dot{\varphi}_2$	$\dot{\varphi}_3$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Задание

В табл. 1 вписать обобщенные координаты одного из вариантов большого оборота назад на перекладине (номер варианта предлагается преподавателем).

1. Следуя вышеизложенному ходу выполнения работы, вычислить угловые скорости звеньев тела и занести результаты вычислений в результирующую табл. 3.

Решение задачи 2 – (4 часа)

Логика выполнения 2-й части работы аналогична решению задачи 1. Единственное отличие – другие траектории движения. При расчете угловой скорости звеньев тела спортсмена (как при решении задачи 1, так и при решении задачи 2) следует учесть, что временной интервал (h) между двумя ближайшими видеокадрами упражнения составляет 0,08с.

Траектории движения спортсмена при выполнении им большого оборота назад и вперед на перекладине в виде обобщенных координат звеньев тела в различных вариантах исполнения упражнения приведены ниже (по материалам исследований Д.А. Лавшука, 2002).

Большой оборот назад на перекладине

Вариант 1			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	461,2	465,0	473,4
2	473,7	477,8	486,2
3	487,0	492,5	501,2
4	500,9	508,0	518,1
5	516,2	523,9	535,0
6	533,9	540,1	549,4
7	554,1	557,9	560,0
8	576,3	578,0	568,9
9	599,7	600,6	580,1
10	623,6	624,9	597,7
11	646,3	650,1	625,3
12	665,7	675,7	664,1
13	681,5	702,3	706,3
14	696,4	729,3	740,2
15	713,7	754,5	762,2
16	735,0	774,5	776,9
17	757,9	788,1	788,5
18	778,6	797,2	798,6
19	795,0	804,6	808,1

Вариант 2			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	462,8	466,1	471,7
2	476,7	477,7	482,3
3	491,5	492,3	495,4
4	508,2	510,5	511,2
5	528,0	532,4	528,6
6	551,4	556,7	545,9
7	577,4	581,5	562,4
8	603,8	605,8	579,5

9	628,1	629,6	601,5
10	649,3	653,4	636,2
11	667,8	677,5	683,4
12	684,8	702,5	728,8
13	702,3	728,1	759,8
14	721,7	752,5	779,1
15	742,8	773,2	792,6
16	763,9	788,6	802,7
17	783,3	799,5	810,8
18	800,2	807,3	817,7
19	815,7	813,9	824,4

Вариант 3			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	455,9	461,2	467,2
2	469,7	471,6	476,7
3	483,9	484,5	488,5
4	499,5	500,9	503,0
5	517,6	521,1	519,8
6	539,2	544,4	537,3
7	564,2	569,1	554,2
8	590,7	593,7	570,7
9	616,3	617,8	589,5
10	639,1	641,5	616,8
11	658,8	665,4	659,0
12	676,4	689,9	707,3
13	693,4	715,3	746,2
14	711,7	740,7	770,5
15	732,1	763,4	786,4
16	753,5	781,5	798,0
17	773,9	794,6	806,9
18	792,1	803,7	814,3
19	807,9	810,6	821,0

Вариант 4			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	443,5	450,4	453,7
2	452,6	458,4	460,9
3	461,8	467,4	468,7
4	471,5	477,2	477,4
5	482,1	488,0	487,1
6	493,8	500,0	497,8
7	507,2	513,1	509,1
8	522,6	527,5	520,6

9	540,2	543,2	532,2
10	559,7	560,1	544,1
11	580,1	578,6	557,0
12	600,5	598,7	572,5
13	619,9	620,4	593,7
14	638,3	643,2	626,5
15	655,7	666,7	669,8
16	673,0	690,5	710,7
17	690,7	713,7	738,3
18	709,2	735,1	754,8
19	728,2	753,2	765,9
20	746,4	767,7	774,1
21	762,7	778,8	780,8
22	776,6	787,4	786,8
23	788,3	794,6	792,8
24	798,5	801,1	798,9
25	807,8	807,5	804,9

Вариант 5			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	86,6	92,0	94,9
2	95,3	100,8	102,3
3	104,4	110,2	110,5
4	114,2	120,2	119,9
5	124,8	130,8	130,6
6	136,3	142,1	142,4
7	148,5	153,7	155,2
8	161,3	165,7	168,6
9	175,3	178,7	182,3
10	191,7	194,1	196,1
11	211,7	213,9	210,2
12	235,3	238,3	226,0
13	259,6	264,9	246,3
14	281,7	290,3	276,4
15	300,8	313,7	315,9
16	318,0	336,3	354,4
17	335,0	358,5	382,3
18	352,6	379,2	400,2
19	370,7	397,1	412,8
20	388,2	411,4	422,4
21	404,0	422,6	430,2
22	417,4	431,5	437,1
23	428,8	439,2	443,7
24	438,8	446,6	450,3
25	448,1	454,3	457,2

Вариант 6			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	93,1	90,2	94,8
2	100,4	97,7	103,2
3	107,8	105,7	113,0
4	116,1	114,8	124,0
5	125,5	125,6	136,1
6	136,2	138,1	149,1
7	148,7	152,0	162,9
8	163,6	167,1	177,2
9	180,8	183,6	190,8
10	199,9	202,0	203,0
11	220,3	222,5	215,0
12	242,0	244,5	230,0
13	264,1	267,2	253,3
14	284,8	290,8	288,7
15	303,2	316,1	331,3
16	320,3	342,6	370,0
17	337,9	368,2	397,8
18	356,5	390,2	415,6
19	375,5	406,6	426,4
20	393,7	417,6	432,9
21	409,8	425,0	437,5
22	423,2	431,0	441,8
23	434,1	437,0	446,5
24	443,3	443,6	451,7
25	451,2	450,6	457,0

Вариант 7			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	86,3	93,5	99,8
2	98,1	103,1	110,2
3	110,1	114,7	122,3
4	122,6	128,2	136,5
5	135,7	143,0	152,7
6	149,8	158,4	169,3
7	166,4	174,4	184,3
8	186,0	191,6	196,3
9	208,1	210,8	205,9
10	231,7	232,7	216,3
11	255,9	256,7	231,6
12	279,2	281,9	255,3
13	299,6	307,4	289,5
14	316,2	333,2	330,4

15	331,3	359,8	367,4
16	347,8	386,1	393,3
17	367,4	408,7	410,4
18	389,2	425,1	423,8
19	410,2	435,8	435,6
20	427,9	443,3	446,6
21	442,4	450,6	457,1

Вариант 8			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	92,2	98,0	104,9
2	104,0	108,6	116,0
3	116,3	121,2	129,1
4	129,1	135,4	144,4
5	142,5	150,6	161,0
6	157,7	166,3	177,1
7	175,8	182,8	190,7
8	196,8	200,9	201,2
9	219,7	221,4	210,7
10	243,8	244,5	223,1
11	267,8	269,3	242,2
12	289,9	294,7	271,1
13	308,3	320,2	309,8
14	323,8	346,4	350,0
15	339,2	373,1	381,7
16	357,2	398,0	402,6
17	378,2	417,7	417,4
18	400,0	431,0	429,8
19	419,5	439,7	441,2
20	435,5	446,8	451,9
21	448,8	454,8	462,3

Вариант 9			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	83,4	91,5	99,4
2	96,7	100,3	106,5
3	109,6	111,4	115,3
4	122,6	124,6	126,6
5	136,1	139,4	140,5
6	150,6	155,4	156,5
7	166,8	172,5	173,0
8	185,0	191,0	188,5
9	205,2	211,0	202,5
10	227,3	232,5	216,5

11	250,9	254,9	233,3
12	274,1	277,9	257,6
13	295,1	301,8	294,1
14	313,2	326,6	337,5
15	329,8	352,2	376,0
16	347,0	377,3	402,8
17	366,2	400,0	421,2
18	387,0	418,7	434,3
19	407,3	432,9	444,0
20	425,6	443,5	451,9
21	441,5	452,3	459,2

Вариант 10			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	461,3	466,8	468,3
2	470,2	476,5	478,4
3	480,4	486,6	489,4
4	492,3	497,7	501,0
5	506,6	510,1	512,2
6	522,8	524,4	522,6
7	540,5	540,8	532,2
8	559,2	559,5	542,2
9	579,2	580,2	555,1
10	600,6	602,5	574,0
11	622,2	625,9	600,5
12	642,4	650,3	633,8
13	660,3	675,2	670,3
14	676,4	700,5	704,3
15	692,3	725,4	731,3
16	709,7	748,4	750,3
17	729,4	766,9	763,4
18	749,5	779,7	773,6
19	767,0	788,2	782,7
20	780,4	794,6	791,2
21	790,7	800,8	799,2
22	799,3	807,7	807,1
23	807,1	815,7	815,1
24	814,9	824,5	823,2

Вариант 11			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	457,2	462,1	463,7

2	465,6	471,6	473,2
3	475,1	481,5	483,8
4	486,1	492,0	495,2
5	499,2	503,7	506,7
6	514,5	517,0	517,5
7	531,5	532,4	527,4
8	549,7	549,9	537,0
9	569,0	569,7	548,1
10	589,8	591,2	563,7
11	611,5	614,1	586,3
12	632,6	638,0	616,4
13	651,6	662,7	652,0
14	668,5	687,8	687,9
15	684,2	713,0	718,9
16	700,7	737,3	741,7
17	719,4	758,3	757,4
18	739,6	773,9	768,8
19	758,7	784,3	778,2
20	774,2	791,5	787,0
21	785,9	797,7	795,2
22	795,1	804,1	803,2
23	803,2	811,6	811,1
24	811,0	820,1	819,1

Вариант 12			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	82,4	87,9	91,6
2	90,9	96,3	98,5
3	99,8	105,4	106,2
4	109,2	115,1	115,1
5	119,4	125,4	125,1
6	130,5	136,4	136,3
7	142,3	147,8	148,7
8	154,8	159,6	161,8
9	168,1	172,0	175,4
10	183,1	186,0	189,2
11	201,2	203,4	203,1
12	223,2	225,6	217,8
13	247,6	251,5	235,2
14	271,1	277,8	259,8
15	291,6	302,2	295,5
16	309,5	325,0	336,0
17	326,5	347,4	369,9
18	343,7	369,1	392,2
19	361,6	388,6	407,0
20	379,6	404,7	417,8

21	396,4	417,4	426,4
22	411,0	427,3	433,8
23	423,3	435,4	440,4
24	433,9	442,8	447,0

Вариант 13			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	112,2	118,8	117,6
2	123,6	129,4	130,8
3	135,9	141,0	142,9
4	149,9	154,2	152,8
5	165,6	169,2	159,3
6	183,0	186,0	163,9
7	201,9	204,6	171,3
8	222,2	224,9	187,1
9	243,8	247,1	212,2
10	265,7	270,6	243,5
11	286,3	294,9	278,1
12	304,1	319,9	314,3
13	319,7	345,6	348,0
14	335,3	370,6	374,3
15	353,0	392,2	392,2
16	373,2	408,5	404,3
17	393,2	419,6	413,8
18	410,2	427,0	422,5
19	423,3	432,6	430,9
20	433,5	438,2	439,0
21	441,9	444,9	447,0
22	449,5	453,0	455,1

Вариант 14			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	455,0	459,6	467,7
2	467,4	471,1	479,5
3	480,3	485,0	493,4
4	493,8	500,2	509,5
5	508,3	515,9	526,7
6	524,7	531,9	542,6
7	543,7	548,8	555,1
8	565,0	567,6	564,5
9	587,9	589,0	574,0
10	611,7	612,6	587,9
11	635,2	637,4	610,1
12	656,5	662,8	643,6

13	673,9	688,9	685,6
14	688,9	715,8	724,8
15	704,6	742,4	752,5
16	723,9	765,3	770,2
17	746,5	782,0	783,0
18	768,8	793,0	793,7
19	787,3	800,9	803,4
20	801,7	808,4	812,7
21	813,5	817,0	822,1
22	824,5	826,4	831,5

Вариант 15			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	76,6	87,7	96,3
2	90,1	95,6	102,8
3	103,2	105,6	110,7
4	116,1	117,7	120,6
5	129,2	131,8	133,2
6	143,2	147,2	148,3
7	158,5	163,8	164,8
8	175,6	181,5	180,9
9	194,8	200,8	195,6
10	216,0	221,6	209,4
11	239,0	243,6	224,3
12	262,6	266,3	244,1
13	284,9	289,7	274,3
14	304,4	314,1	315,7
15	321,5	339,4	358,1
16	338,2	365,0	390,8
17	356,3	389,1	412,8
18	376,5	409,9	428,2
19	397,3	426,3	439,5
20	416,8	438,5	448,1
21	433,8	448,0	455,5
22	448,8	456,6	463,0

Вариант 16			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	457,2	462,8	464,7
2	466,6	472,2	473,0
3	476,7	482,5	482,2
4	487,8	493,9	492,4
5	500,3	506,4	503,4
6	514,7	520,2	514,8

7	531,2	535,2	526,4
8	549,8	551,4	538,0
9	569,9	569,1	550,3
10	590,4	588,4	564,3
11	610,3	609,4	582,1
12	629,2	631,7	608,3
13	647,1	654,9	647,6
14	664,4	678,6	691,5
15	681,7	702,2	726,3
16	699,8	724,7	747,5
17	718,7	744,6	760,9
18	737,5	760,9	770,3
19	754,9	773,6	777,6
20	769,9	783,3	783,8
21	782,6	791,1	789,8
22	793,5	797,9	795,8
23	803,2	804,3	801,9
24	812,4	810,6	807,9

Вариант 17			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	85,1	90,9	92,9
2	95,8	98,5	101,2
3	106,8	107,2	110,6
4	117,9	117,5	121,2
5	129,3	129,1	133,2
6	141,7	141,9	146,9
7	155,6	155,7	162,3
8	170,8	170,6	178,7
9	187,4	187,5	194,5
10	205,6	206,8	208,9
11	225,6	227,9	222,5
12	247,3	249,7	237,8
13	269,1	271,3	257,8
14	289,1	293,0	286,8
15	306,2	315,6	324,9
16	321,2	339,2	364,2
17	336,3	363,2	395,1
18	353,0	386,1	415,3
19	370,9	406,0	427,9
20	388,9	421,4	435,8
21	405,7	432,3	441,2
22	420,8	440,0	446,1
23	434,5	446,2	451,5
24	447,1	451,9	457,8

Вариант 18			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	90,3	94,6	96,9
2	101,3	102,7	105,8
3	112,3	112,1	115,7
4	123,5	123,1	127,0
5	135,4	135,4	139,8
6	148,5	148,7	154,4
7	163,0	163,0	170,5
8	178,9	178,8	186,8
9	196,3	196,9	201,9
10	215,4	217,2	215,7
11	236,3	238,8	229,8
12	258,3	260,5	246,9
13	279,5	282,1	271,0
14	298,0	304,2	305,1
15	313,8	327,3	345,1
16	328,7	351,2	381,0
17	344,4	374,9	406,4
18	361,8	396,5	422,4
19	380,0	414,3	432,3
20	397,5	427,3	438,7
21	413,5	436,4	443,6
22	427,8	443,2	448,7
23	440,9	449,1	454,6
24	453,2	454,8	461,1

Вариант 19			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	82,0	90,2	89,5
2	93,6	100,1	102,2
3	105,5	110,8	114,6
4	117,7	122,6	127,5
5	130,5	135,4	142,0
6	144,7	149,4	158,1
7	160,9	165,0	174,6
8	179,0	182,7	189,2
9	198,6	202,7	200,4
10	219,7	224,6	210,3
11	242,8	247,6	224,7
12	266,7	271,2	250,5
13	288,6	296,0	291,2
14	307,5	322,9	338,7

15	325,3	350,9	380,1
16	344,2	377,8	409,6
17	364,3	401,2	429,5
18	384,5	419,5	442,6
19	403,3	432,8	451,0
20	420,2	442,7	456,8
21	435,3	451,3	461,8
22	449,1	459,7	466,8

Вариант 20			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	87,7	95,1	95,9
2	99,5	105,3	108,4
3	111,5	116,5	120,9
4	124,0	128,8	134,5
5	137,4	142,2	149,9
6	152,6	156,9	166,5
7	169,8	173,6	182,3
8	188,6	192,5	195,2
9	208,9	213,5	205,2
10	231,0	236,0	216,5
11	254,8	259,3	235,7
12	278,0	283,4	269,3
13	298,3	309,2	314,9
14	316,4	336,9	360,8
15	334,5	364,6	396,2
16	354,2	390,1	420,5
17	374,5	411,0	436,8
18	394,1	426,7	447,2
19	412,0	438,0	454,1
20	428,0	447,1	459,4
21	442,3	455,5	464,3
22	455,9	463,9	469,3

Вариант 21			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	64,9	94,3	102,7
2	79,7	102,0	111,1
3	94,4	110,4	121,1
4	108,6	120,2	133,0
5	122,9	131,7	147,3
6	137,6	144,9	163,8
7	153,7	159,5	181,3
8	171,9	175,7	196,9

9	192,6	193,9	208,1
10	215,1	214,6	215,2
11	238,4	237,5	222,3
12	261,2	261,0	236,3
13	282,2	284,1	264,5
14	300,2	307,7	309,1
15	315,5	332,3	359,0
16	330,6	357,7	399,0
17	348,2	383,0	424,1
18	368,1	406,2	438,8
19	388,7	424,9	447,5
20	408,7	438,1	453,8
21	427,3	447,9	459,7
22	444,3	456,5	465,9

Вариант 22			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	106,6	113,6	110,9
2	117,8	124,1	124,3
3	129,6	135,1	137,1
4	142,7	147,4	148,2
5	157,5	161,5	156,5
6	174,1	177,4	161,6
7	192,3	195,1	166,9
8	211,9	214,5	178,0
9	232,9	235,8	198,6
10	254,8	258,7	227,3
11	276,3	282,7	260,4
12	295,5	307,3	296,2
13	312,1	332,7	331,9
14	327,3	358,3	362,3
15	343,8	382,0	384,2
16	362,9	401,0	398,8
17	383,4	414,7	409,3
18	402,2	423,7	418,2
19	417,2	429,9	426,7
20	428,7	435,3	435,0
21	437,8	441,4	443,0
22	445,8	448,8	451,0
23	453,3	457,4	459,3

Вариант 23			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	96,8	93,9	98,8

2	104,0	101,6	108,0
3	111,8	110,1	118,4
4	120,6	120,0	129,9
5	130,6	131,7	142,5
6	142,2	144,9	155,9
7	155,8	159,4	170,0
8	171,9	175,1	184,1
9	190,1	192,5	197,1
10	209,9	212,0	208,9
11	231,0	233,4	221,8
12	253,1	255,7	240,3
13	274,7	278,8	269,5
14	294,3	303,3	309,8
15	311,8	329,3	351,8
16	329,0	355,7	385,3
17	347,1	379,8	407,7
18	366,0	399,1	421,7
19	384,8	412,7	430,0
20	402,1	421,6	435,3
21	416,8	428,1	439,6
22	428,9	434,0	444,1
23	438,9	440,2	449,1

Вариант 24			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	57,5	90,5	98,6
2	72,3	98,1	106,8
3	87,1	106,1	115,9
4	101,5	115,1	126,8
5	115,7	125,7	139,8
6	130,1	138,1	155,3
7	145,4	152,0	172,6
8	162,5	167,4	189,5
9	181,9	184,5	203,1
10	203,7	203,9	212,0
11	226,7	225,8	218,4
12	249,9	249,2	228,0
13	272,0	272,6	248,2
14	291,6	295,8	285,2
15	308,0	319,9	334,4
16	322,9	345,0	380,9
17	339,1	370,5	413,2
18	358,0	395,0	432,4
19	378,5	416,2	443,6
20	398,8	432,1	450,9

21	418,1	443,3	456,7
22	436,0	452,3	462,7
23	452,4	460,8	469,1

Большой оборот вперед на перекладине

Вариант 1			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	469,7	457,0	455,0
2	478,6	468,2	466,4
3	489,5	479,5	477,6
4	502,5	491,7	488,9
5	517,5	505,0	500,7
6	534,1	519,6	514,1
7	551,5	536,4	530,6
8	569,1	555,5	552,3
9	586,7	576,5	580,8
10	604,6	598,9	613,7
11	623,9	622,6	643,3
12	645,8	646,6	662,1
13	670,6	669,1	670,0
14	696,4	688,3	672,8
15	721,6	703,5	677,6
16	745,3	715,4	688,3
17	766,3	726,2	704,6
18	783,1	738,0	723,5
19	795,8	751,4	742,1
20	805,2	765,9	759,2
21	812,1	780,4	774,7
22	817,6	794,1	789,1

Вариант 2			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	449,8	399,8	388,2
2	462,1	417,0	410,8
3	471,1	436,0	431,7
4	478,6	454,5	450,8
5	485,8	471,5	468,4
6	494,5	487,4	484,8
7	506,5	503,0	500,1
8	522,5	518,5	514,4
9	540,9	534,3	529,5
10	559,7	551,4	548,1

11	578,4	570,9	573,0
12	597,8	593,0	604,0
13	618,4	617,0	635,9
14	640,4	641,9	660,6
15	664,7	666,0	672,6
16	691,3	688,0	674,3
17	719,0	707,2	675,0
18	746,7	723,6	682,9
19	773,1	737,7	700,3
20	795,2	751,7	724,5
21	811,2	768,4	752,0
22	821,7	788,3	780,0

Вариант 3			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	456,4	408,1	399,7
2	466,9	426,4	421,5
3	475,0	445,4	441,5
4	482,1	463,2	459,8
5	489,9	479,5	476,8
6	500,0	495,2	492,6
7	514,0	510,7	507,3
8	531,5	526,3	521,7
9	550,3	542,6	538,1
10	569,0	560,8	559,7
11	588,0	581,7	588,0
12	608,0	604,8	620,3
13	629,1	629,4	649,7
14	652,2	654,2	668,3
15	677,8	677,3	674,2
16	705,1	698,0	674,2
17	732,9	715,8	677,8
18	760,3	730,8	690,5
19	784,9	744,6	711,8
20	804,0	759,6	738,1
21	817,0	778,0	766,0
22	825,7	798,8	793,7

Вариант 4			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	461,9	457,5	452,5
2	467,5	463,7	460,9
3	474,7	470,8	470,2
4	483,6	478,9	480,4

5	494,4	488,1	491,1
6	507,0	498,8	501,5
7	521,2	511,2	512,0
8	537,2	525,2	523,5
9	555,5	540,1	537,7
10	576,0	555,3	556,5
11	597,2	571,4	581,2
12	617,0	589,8	608,9
13	635,1	611,9	633,9
14	653,0	636,9	652,1
15	672,7	661,1	664,1
16	694,8	681,4	673,0
17	717,9	697,4	681,8
18	739,7	710,6	692,5
19	758,3	722,5	705,8
20	773,1	734,1	721,4
21	784,5	745,7	737,8
22	793,1	757,1	753,5
23	799,4	768,0	767,4
24	804,2	778,2	779,5
25	808,0	787,6	789,9
26	811,2	796,5	799,1

Вариант 5			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	91,4	59,4	53,0
2	96,0	72,1	67,0
3	100,8	83,8	80,5
4	106,7	94,7	93,4
5	114,3	105,1	105,7
6	123,9	115,8	117,3
7	135,4	127,5	128,6
8	148,8	140,5	140,0
9	164,1	154,6	152,1
10	180,9	170,1	166,0
11	198,7	187,3	183,6
12	216,8	206,5	207,2
13	235,5	227,4	237,6
14	255,4	250,1	269,3
15	277,0	274,3	293,8
16	300,3	298,6	307,0
17	324,8	320,3	312,2
18	349,8	337,2	315,9
19	374,6	349,6	323,9
20	397,4	359,9	338,0

21	416,0	370,9	356,1
22	430,0	383,8	375,2
23	440,2	398,3	393,2
24	447,8	412,9	409,6
25	453,9	426,6	424,1
26	459,6	439,4	437,1

Вариант 6			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	89,1	52,9	45,8
2	93,7	65,8	60,1
3	98,3	78,1	73,9
4	103,6	89,4	87,0
5	110,3	99,9	99,6
6	118,8	110,4	111,6
7	129,4	121,5	123,0
8	141,9	133,9	134,2
9	156,2	147,4	145,9
10	172,3	162,2	158,7
11	189,7	178,4	174,2
12	207,7	196,6	194,5
13	226,1	216,7	221,8
14	245,2	238,5	253,8
15	265,9	262,1	282,9
16	288,5	286,6	301,8
17	312,5	310,0	310,2
18	337,3	329,4	313,8
19	362,3	343,8	319,2
20	386,4	354,8	330,3
21	407,3	365,2	346,7
22	423,6	377,1	365,7
23	435,5	390,9	384,4
24	444,3	405,6	401,6
25	451,0	419,9	417,0
26	456,7	433,1	430,7

Вариант 7			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	100,4	87,3	81,5
2	107,4	97,9	94,1
3	115,7	108,6	106,0
4	125,9	119,5	117,6
5	138,1	130,9	129,5
6	152,1	143,8	142,1

7	167,5	158,6	155,9
8	184,2	175,2	171,9
9	202,1	193,5	192,3
10	220,8	213,4	217,9
11	240,1	235,1	246,8
12	260,2	258,4	274,2
13	281,8	282,6	294,4
14	305,5	306,2	304,8
15	331,4	327,3	307,8
16	357,9	344,2	310,2
17	382,4	357,6	317,6
18	403,5	369,8	331,2
19	420,4	382,3	349,0
20	432,7	396,1	368,4
21	441,6	410,4	388,0
22	448,6	423,7	407,4
23	455,0	435,5	425,8
24	461,0	446,4	442,3

Вариант 8			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	97,2	82,0	75,1
2	103,8	92,6	87,8
3	111,3	103,3	100,1
4	120,6	114,0	111,8
5	131,8	125,1	123,5
6	144,9	137,2	135,7
7	159,6	150,9	148,8
8	175,7	166,7	163,5
9	193,0	184,1	181,5
10	211,4	203,3	204,5
11	230,4	224,0	232,2
12	250,1	246,6	261,0
13	270,8	270,4	285,4
14	293,3	294,6	300,8
15	318,3	317,2	306,9
16	344,8	336,2	308,7
17	370,5	351,2	313,1
18	393,5	363,7	323,7
19	412,5	375,9	339,8
20	427,1	389,1	358,6
21	437,5	403,2	378,2
22	445,2	417,3	397,8
23	451,9	429,8	416,8
24	458,1	441,0	434,3

Вариант 9			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	90,2	58,2	44,5
2	95,2	71,0	60,9
3	100,8	83,6	76,9
4	107,8	95,9	91,9
5	116,3	107,7	105,5
6	126,3	119,4	118,3
7	138,1	131,7	131,0
8	152,0	145,4	143,8
9	167,8	160,7	157,7
10	185,3	177,5	174,0
11	204,4	195,7	194,7
12	224,9	215,8	221,5
13	246,3	238,1	251,4
14	268,3	262,7	277,0
15	291,4	287,8	293,1
16	316,7	311,1	301,3
17	344,1	331,0	306,8
18	371,5	347,8	314,2
19	395,8	362,5	325,9
20	414,8	376,1	341,4
21	428,7	389,7	359,5
22	438,5	403,5	378,8
23	445,4	417,5	398,5
24	450,5	431,1	417,5

Вариант 10			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	92,5	82,9	84,6
2	96,4	88,7	91,9
3	100,9	94,7	98,9
4	106,5	101,0	105,3
5	113,2	107,8	111,8
6	121,4	115,5	118,8
7	131,4	124,1	126,7
8	143,4	134,0	135,6
9	157,3	145,4	145,5
10	172,6	158,4	156,7
11	188,6	173,6	170,0
12	204,8	190,8	187,0
13	221,6	209,9	209,4
14	239,1	230,7	236,4

15	258,1	252,7	263,0
16	278,6	275,1	283,8
17	300,7	296,4	297,8
18	324,1	315,4	307,4
19	348,0	331,4	315,9
20	371,1	345,0	325,8
21	391,8	357,1	338,3
22	408,9	369,0	353,4
23	422,2	381,8	369,3
24	432,2	396,2	384,0
25	439,4	411,4	396,7
26	444,7	425,5	407,9
27	448,8	436,4	418,6
28	452,2	444,0	429,1
29	455,6	449,5	439,2

Вариант 11			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	459,6	454,7	448,2
2	464,6	460,5	456,7
3	470,9	467,1	465,4
4	478,9	474,7	475,2
5	488,8	483,3	485,7
6	500,5	493,3	496,3
7	513,9	504,8	506,7
8	529,0	518,1	517,5
9	546,0	532,5	530,2
10	565,5	547,7	546,4
11	586,7	563,2	568,2
12	607,4	580,2	595,0
13	626,2	600,4	622,1
14	644,0	624,2	643,9
15	662,6	649,3	658,7
16	683,5	671,8	668,7
17	706,4	689,9	677,3
18	729,1	704,2	686,8
19	749,4	716,6	698,8
20	766,2	728,3	713,4
21	779,2	739,9	729,6
22	789,1	751,5	745,8
23	796,5	762,7	760,7
24	802,0	773,2	773,7
25	806,2	783,0	784,8
26	809,6	792,1	794,6
27	812,6	800,7	803,4

28	815,4	808,8	811,6
29	818,1	816,7	819,6

Вариант 12			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	90,6	80,0	80,8
2	94,4	85,8	88,3
3	98,6	91,7	95,5
4	103,6	97,8	102,1
5	109,7	104,3	108,5
6	117,1	111,5	115,2
7	126,2	119,7	122,7
8	137,2	128,9	131,1
9	150,2	139,5	140,4
10	164,8	151,7	150,9
11	180,5	165,7	163,0
12	196,7	181,9	178,0
13	213,1	200,1	197,5
14	230,2	220,2	222,6
15	248,4	241,6	250,2
16	268,1	263,9	274,3
17	289,4	286,0	291,5
18	312,2	306,3	302,9
19	336,0	323,8	311,6
20	359,8	338,5	320,5
21	381,9	351,2	331,7
22	400,8	363,0	345,6
23	416,0	375,3	361,4
24	427,6	388,8	376,9
25	436,1	403,8	390,6
26	442,3	418,7	402,4
27	446,9	431,4	413,2
28	450,5	440,6	423,9
29	453,9	446,9	434,3

Вариант 13			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	466,0	451,3	449,1
2	473,9	462,6	460,7
3	483,8	473,8	472,0
4	495,7	485,5	483,2
5	509,7	498,2	494,6
6	525,6	512,1	507,1
7	542,7	527,7	521,9
8	560,3	545,7	540,7

9	577,9	565,8	565,7
10	595,5	587,5	597,1
11	614,0	610,6	629,5
12	634,4	634,7	654,3
13	658,0	658,2	667,1
14	683,5	679,2	671,5
15	709,1	696,4	674,6
16	733,7	709,7	682,1
17	756,2	720,8	695,9
18	775,2	731,9	714,0
19	789,9	744,5	733,0
20	800,8	758,6	750,9
21	808,9	773,2	767,1
22	814,9	787,4	782,0
23	820,1	800,6	795,9
24	825,1	812,8	809,2
25	830,2	824,3	822,3

Вариант 14			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	96,0	72,1	67,0
2	100,8	83,8	80,5
3	106,7	94,7	93,4
4	114,3	105,1	105,7
5	123,9	115,8	117,3
6	135,4	127,5	128,6
7	148,8	140,5	140,0
8	164,1	154,6	152,1
9	180,9	170,1	166,0
10	198,7	187,3	183,6
11	216,8	206,5	207,2
12	235,5	227,4	237,6
13	255,4	250,1	269,3
14	277,0	274,3	293,8
15	300,3	298,6	307,0
16	324,8	320,3	312,2
17	349,8	337,2	315,9
18	374,6	349,6	323,9
19	397,4	359,9	338,0
20	416,0	370,9	356,1
21	430,0	383,8	375,2
22	440,2	398,3	393,2
23	447,8	412,9	409,6
24	453,9	426,6	424,1
25	459,6	439,4	437,1

Вариант 15			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	93,7	65,8	60,1
2	98,3	78,1	73,9
3	103,6	89,4	87,0
4	110,3	99,9	99,6
5	118,8	110,4	111,6
6	129,4	121,5	123,0
7	141,9	133,9	134,2
8	156,2	147,4	145,9
9	172,3	162,2	158,7
10	189,7	178,4	174,2
11	207,7	196,6	194,5
12	226,1	216,7	221,8
13	245,2	238,5	253,8
14	265,9	262,1	282,9
15	288,5	286,6	301,8
16	312,5	310,0	310,2
17	337,3	329,4	313,8
18	362,3	343,8	319,2
19	386,4	354,8	330,3
20	407,3	365,2	346,7
21	423,6	377,1	365,7
22	435,5	390,9	384,4
23	444,3	405,6	401,6
24	451,0	419,9	417,0
25	456,7	433,1	430,7

Вариант 16			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	93,7	82,9	79,0
2	98,7	90,3	88,8
3	104,0	98,0	98,4
4	110,1	106,1	107,9
5	117,4	114,9	117,4
6	126,4	124,6	127,1
7	137,2	135,4	137,3
8	150,2	147,6	148,5
9	165,0	161,3	161,2
10	181,5	176,9	176,2
11	199,0	194,2	193,8
12	216,6	213,4	214,4
13	234,7	234,4	237,7
14	255,4	257,0	261,5

15	280,2	280,4	282,3
16	306,7	303,2	297,6
17	331,9	323,4	307,7
18	356,7	339,3	315,4
19	381,2	351,4	324,1
20	402,0	361,9	335,8
21	416,5	373,0	350,6
22	426,2	385,4	367,1
23	433,4	398,3	383,5
24	439,0	410,6	398,9
25	443,2	421,5	413,2
26	446,5	431,0	426,3
27	449,4	439,3	438,1
28	452,4	446,6	448,8

Вариант 17			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	93,2	63,6	61,6
2	97,2	75,0	72,5
3	101,6	86,0	83,5
4	106,9	96,4	94,6
5	113,5	106,2	105,7
6	121,7	116,5	116,7
7	131,6	128,1	127,6
8	143,7	141,1	139,1
9	158,2	155,6	151,7
10	175,0	171,2	166,3
11	194,0	188,4	183,9
12	214,3	207,4	205,7
13	235,1	228,7	231,8
14	256,4	251,8	258,4
15	278,8	275,6	279,4
16	302,8	298,6	292,6
17	328,4	319,4	301,0
18	354,5	337,5	309,0
19	379,2	352,9	319,2
20	400,4	365,8	332,2
21	417,2	377,0	347,1
22	429,8	387,2	362,8
23	439,2	397,2	378,7
24	446,4	407,5	394,3
25	452,0	418,0	408,6
26	456,5	428,6	421,2
27	460,8	439,0	432,3
28	465,3	449,1	442,9

Вариант 18			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	95,2	69,3	67,1
2	99,3	80,6	78,0
3	104,1	91,3	89,0
4	110,0	101,3	100,1
5	117,4	111,3	111,2
6	126,4	122,1	122,2
7	137,3	134,4	133,2
8	150,6	148,2	145,2
9	166,3	163,2	158,7
10	184,3	179,6	174,6
11	204,0	197,6	194,2
12	224,7	217,8	218,3
13	245,7	240,1	245,4
14	267,4	263,7	269,9
15	290,6	287,3	286,9
16	315,5	309,3	297,2
17	341,5	328,9	304,8
18	367,1	345,5	313,7
19	390,3	359,6	325,4
20	409,4	371,6	339,5
21	423,9	382,2	354,9
22	434,8	392,2	370,8
23	443,1	402,3	386,6
24	449,4	412,7	401,7
25	454,3	423,3	415,1
26	458,7	433,8	426,8
27	463,0	444,1	437,6
28	467,6	453,9	448,2

Вариант 19			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	92,7	64,6	52,7
2	97,8	77,3	68,9
3	104,1	89,8	84,6
4	111,9	101,9	98,8
5	121,1	113,5	112,0
6	131,9	125,4	124,6
7	144,7	138,3	137,3
8	159,7	152,8	150,6
9	176,3	168,9	165,4
10	194,6	186,4	183,6

11	214,5	205,5	207,4
12	235,5	226,6	236,5
13	257,2	250,2	265,2
14	279,6	275,4	286,3
15	303,8	299,8	297,9
16	330,3	321,5	304,0
17	358,0	339,8	310,0
18	384,2	355,4	319,5
19	406,0	369,4	333,3
20	422,4	382,9	350,2
21	434,1	396,5	369,0
22	442,2	410,5	388,7
23	448,1	424,4	408,1
24	452,7	437,7	426,5
25	457,1	450,3	443,1

Вариант 20			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	90,2	61,7	48,0
2	93,8	77,1	64,6
3	98,2	91,8	80,5
4	105,0	104,9	94,5
5	115,1	116,4	106,5
6	128,3	127,2	117,5
7	143,8	138,4	128,8
8	160,3	151,2	141,3
9	177,3	166,1	156,9
10	194,7	183,4	177,1
11	212,5	202,8	203,8
12	230,5	224,2	236,7
13	248,7	247,1	270,3
14	268,4	271,1	294,8
15	291,6	295,1	303,8
16	318,2	316,8	301,5
17	346,0	334,7	298,3
18	372,4	348,9	303,4
19	396,3	360,9	318,7
20	416,1	372,8	340,6
21	430,4	386,9	364,3
22	439,5	403,4	386,5
23	445,2	420,6	406,9
24	449,5	436,7	425,4
25	453,7	451,5	441,8

Вариант 21			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	92,0	69,4	56,3
2	95,8	84,6	72,7
3	101,2	98,6	87,8
4	109,6	110,8	100,7
5	121,4	121,8	112,1
6	135,9	132,7	123,1
7	151,9	144,5	134,8
8	168,8	158,4	148,6
9	186,0	174,5	166,3
10	203,6	192,9	189,6
11	221,5	213,3	219,6
12	239,5	235,5	254,1
13	258,3	259,0	284,3
14	279,5	283,2	301,2
15	304,5	306,4	303,5
16	332,1	326,3	299,3
17	359,4	342,2	299,5
18	384,7	355,1	309,9
19	406,8	366,7	329,2
20	423,9	379,4	352,5
21	435,5	394,9	375,7
22	442,6	412,1	396,9
23	447,4	428,8	416,4
24	451,5	444,3	433,9
25	456,1	458,5	449,2

Вариант 22			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	96,2	86,6	83,9
2	101,3	94,1	93,6
3	107,0	102,0	103,2
4	113,6	110,4	112,6
5	121,7	119,6	122,2
6	131,5	129,9	132,1
7	143,4	141,3	142,8
8	157,4	154,2	154,7
9	173,1	168,9	168,4
10	190,2	185,3	184,6
11	207,8	203,6	203,7
12	225,5	223,7	225,8
13	244,5	245,6	249,7
14	267,4	268,7	272,5

15	293,5	292,0	290,7
16	319,5	313,8	303,1
17	344,2	331,9	311,6
18	369,1	345,7	319,4
19	392,3	356,7	329,5
20	410,0	367,3	342,9
21	421,8	379,0	358,8
22	430,1	391,8	375,4
23	436,4	404,6	391,3
24	441,2	416,2	406,2
25	444,9	426,5	419,9
26	448,0	435,3	432,3

Вариант 23			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	90,8	89,3	82,3
2	95,8	97,6	91,9
3	102,1	105,3	100,5
4	109,9	112,9	108,6
5	119,4	121,1	116,6
6	131,1	130,0	124,8
7	144,9	139,8	133,6
8	160,3	151,1	143,6
9	176,5	164,6	155,9
10	193,2	180,5	172,2
11	210,0	198,5	194,0
12	226,8	218,1	221,6
13	244,3	239,0	252,0
14	263,4	261,1	278,5
15	284,6	284,0	295,6
16	307,5	306,5	302,9
17	331,4	326,8	304,8
18	355,7	343,4	306,9
19	379,4	356,4	313,6
20	400,7	367,0	326,5
21	417,4	377,3	344,4
22	429,2	388,8	364,5
23	436,7	401,7	384,2
24	441,4	415,0	402,2
25	444,6	427,4	417,9
26	447,4	438,4	431,4

Вариант 24			
№ кадра	Обобщенные координаты		
	Q ₁	Q ₂	Q ₃
1	93,2	93,5	87,3
2	98,8	101,5	96,3
3	105,8	109,1	104,6
4	114,4	116,9	112,6
5	125,0	125,5	120,6
6	137,7	134,7	129,1
7	152,4	145,2	138,4
8	168,3	157,6	149,3
9	184,8	172,3	163,5
10	201,6	189,3	182,3
11	218,4	208,1	207,1
12	235,5	228,4	236,8
13	253,6	249,9	266,2
14	273,7	272,5	288,4
15	295,8	295,5	300,2
16	319,3	317,0	304,1
17	343,5	335,6	305,5
18	367,7	350,3	309,5
19	390,5	361,8	319,3
20	409,7	372,1	335,0
21	423,9	382,8	354,3
22	433,4	395,1	374,5
23	439,3	408,4	393,5
24	443,1	421,3	410,3
25	446,0	433,1	424,9
26	449,0	443,3	437,5

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бальсевич В.К.** Онтокинезиология человека. – М.: Теория и практика физической культуры, 2000. 275 с., ил.
2. **Бернштейн Н.А.** Очерки по физиологии движений и физиологии активности. М.: Медицина, 1966. 349 с.
3. **Богданов В.А.** Элементы биомеханики тела человека. Физиология движения. Л.: Наука, 1976. С. 5–34.
4. **Богданов В.А., Гурфинкель В.С.** Биомеханика локомоций человека // Физиология движения. Л.: Наука, 1976. С. 276–315.
5. **Бутузов В.Ф.** Сингулярные возмущения. М.: Знание, 1988. 48 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика». №1).
6. **Гавердовский Ю.К.** Техника гимнастических упражнений. М.: Терра-спорт, 2002. 512 с.
7. **Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования.** Специальность 022300. Физическая культура. М., 2000. 33 с.
8. **Гужаловский А.А., Алабин А.В.** Модельные характеристики физической подготовленности девушек спринтеров и экспериментальное обоснование методики их индивидуальной подготовки // Теория и практика физической культуры. 1980. № 5. С. 33–36.
9. **Донской Д.Д.** Биомеханика: Учебн. пособие для студентов фак. физ. воспитания пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1975. 238 с.
10. **Донской Д.Д., Зацюрский В.М.** Биомеханика: Уч-ник для ин-тов физ. культ. М.: Физкультура и спорт, 1979. 264 с.
11. **Дьяконов В.П.** Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 240 с.
12. **Евсеев С.П., Малеев А.И.** Формирование динамической осанки у гимнастов // Гимнастика. 1978. Вып. 1. С. 17–20.
13. **Ельник И.Э.** Некоторые вопросы организации программированного обучения гимнастическим упражнениям // Гимнастика. 1979. Вып. 2. С. 22–25.
14. **Загrevский В.И.** Модели анализа движений биомеханических систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. 124 с.
15. **Загrevский В.И.** Программирование обучающей деятельности спортсменов на основе имитационного моделирования движений человека на ЭВМ: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук. М., 1994. – 48 с.
16. **Загrevский В.И.** Моделирование как метод научного познания двигательных действий // Вестник ТГПУ, 1999. Выпуск 2 (11). Серия: физическая культура и спорт. Томск, 1999. С. 11–14.
17. **Загrevский В.И.** Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем. Томск: Том. гос. пед. ун-т, 1999. 156 с.
18. **Загrevский В.И., Загrevский О.И.** Оптимальная вариативность варьирования управляющих функций в технических действиях спортсмена // Вестник Томского государственного педагогического университета, вып. 2 (11). Серия: физическая культура и спорт. Томск, 1999. С. 17–20.
19. **Загrevский В.И., Лавшук Д.А.** Построение оптимальной техники спортивных упражнений на основе принципа максимума Понтрягина в вычислительном эксперименте на ПЭВМ // ВЕСНИК Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А.Куляшова. Магілёў, 1998. № 1. С. 34–39.
20. **Загrevский В.И., Лавшук Д.А., Загrevский О.И.** Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ. Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 2000. 190 с.

21. **Загревский О.И.** Построение техники двигательных действий гимнастов в упражнениях на брусьях. Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 1999. 112 с.
22. **Загревский О.И.** Построение техники гимнастических упражнений на основе математического моделирования на ЭВМ: Автореф. ... д-ра пед. наук. Омск, 2000. 52 с.
23. **Защиорский В.М.** Методы экспериментальных исследований в современной биомеханике спорта // Материалы первой Всесоюзной научной конференции по биомеханике спорта: М., 1974. Ч I. С. 35.
24. **Защиорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н.** Биомеханика двигательного аппарата человека. М.: ФиС, 1981. 143 с.
25. **Защиорский В.М., Прилуцкий Б.И.** Нахождение усилий мышц человека по заданному движению // Современные проблемы биомеханики / Научный совет РАН по проблемам биомеханики. Нижний Новгород, 1992. Вып. 7: Биомеханика мышц и структура движений. С. 81–123.
26. **Зинковский А.В., Кулаков А.М., Новаченко С.И., Павлов В.А.** Динамическая модель техники спортивных упражнений // Теория и практика физической культуры. 1977. № 2. С. 59–62.
27. **Зинковский А.В., Трофимова И.А., Чистяков В.А.** Проблема оптимального построения техники спортивных упражнений в спорте // Вопросы физического воспитания студентов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. С. 101–110.
28. **Иванов В. В.** Комплексный контроль в подготовке спортсменов. М.: ФиС, 1987. 256 с.
29. **Ипполитов Ю.А.** Исследование биомеханических характеристик гимнастических упражнений и путей изменения их структуры: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. М., 1969. 21 с.
30. **Ипполитов Ю.А.** Методы обучения гимнастическим упражнениям на основе их моделирования: Дис. д-ра пед. наук. М., 1988. 362 с.
31. **Иссурин В.В., Глазков А.В., Дементьев А.В., Хохловский Н.Ф., Проскуряков А.Б.** Метрولوجический анализ метода киноциклографии при изучении кинематики движений пловцов // Теория и практика физической культуры. 1977, № 3. С. 18–21.
32. **Калашиников В. В.** Организация моделирования сложных систем. М.: Знание, 1982. 64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика, №3).
33. **Киселев В.Г.** Установка для измерения моментов мышечных сил развиваемых в плечевых и тазобедренных суставах гимнаста // Теория и методика физического воспитания в высшей школе. Рига, 1969. С. 25–27.
34. **Киселев В.Г., Назаров В.Т.** Об относительной силе мышц в плечевых и тазобедренных суставах у начинающих гимнастов // Вопросы физического воспитания в высшей школе. Рига, 1970. С. 32.
35. **Киселев В.Г., Назаров В.Т.** Об относительной силе мышц – сгибателей и разгибателей плеча у гимнастов различной квалификации // Вопросы физического воспитания в высшей школе. Рига, 1972. С. 35.
36. **Коренберг В.Б.** Основы качественного биомеханического анализа. М.: Физкультура и спорт, 1979. 209 с.
37. **Коренберг В.Б.** Основы спортивной кинезиологии: учебное пособие. М.: Советский спорт, 2005. 232 с.
38. **Коренев Г.В.** Цель и приспособляемость движения. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 528 с.
39. **Коренев Г.В.** Введение в механику человека. М.: Наука, 1977. 264 с.
40. **Лавишук Д.А.** Синтез оптимального управления биомеханическими системами на основе принципа максимума Понтрягина // Материалы исследований молодых ученых, аспирантов, соискателей и студентов. Могилев: Изд-во МГУ им. А.А.Кулешова, 1997. С. 98–101.
41. **Назаров В.Т.** Упражнения на перекладине (механика, техника выполнения, методика обучения). Рига: Рижский политехнический ин-т, 1970. 68 с.

42. **Назаров В.Т.** Упражнения на перекладине (механика, техника выполнения, методика обучения). Рига: Риж. политех. ин-т, 1972. Ч. 2. 130 с.
43. **Назаров В.Т.** Упражнения на перекладине. М.: Физкультура и спорт, 1973. 134 с.
44. **Назаров В.Т., Кузенко Б.П.** О влиянии внешнего момента силы на характер движения спортсмена в условиях твердой опоры // Теория и практика физической культуры. 1974. № 9. С. 18–20.
45. **Новик И.Б.** О моделировании сложных систем. М.: Мысль, 1965. 95 с.
46. **Новик И.Б., Мамедов Н.М., Давтян Н.А.** Логика научного познания и метод моделирования // Философско-методологические основания системных исследований / Системный анализ и системное моделирование / Под ред. Д.М.Гвишиани. М.: Наука, 1983. С. 156–179.
47. **Петров В.А., Гагин Ю.А.** Механика спортивных движений. М.: ФиС, 1974. 232 с.
48. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 384 с.
49. **Попов Г.И.** Биомеханика: учебник для студ. вуз, обуч. по спец. «Физич. культ.». М: Академия, 2005. 256 с.
50. **Райцин Л.М., Селуянов В.Н.** Метрологические основы измерения силовых показателей спортсмена: Материалы первой всесоюзной научной конференции по биомеханике спорта (Киев, 24–25 сентября 1974). М. Ч.1. С. 56–57.
51. **Советов Б.Я., Яковлев С.Я.** Моделирование систем: Уч-ник для вузов по спец. «Автоматизированные системы управления». М.: Высш. шк., 1985. 271 с.
52. **Советов Б.Я., Яковлев С.Я.** Моделирование систем: Лабораторный практикум: Учебн. пособие для вузов по спец. «Автом. сист. обраб. инф. и управл.». М.: Высш. шк., 1989. 80 с.
53. **Советский** энциклопедический словарь / Научно-редакционный совет: А.М.Прохоров (пред.). М.: Советская энциклопедия, 1981. 1600 с.
54. **Сучилин Н.Г., Аркаев Л.Я., Савельев В.С.** Педагогико-биомеханический анализ техники спортивных движений на основе программно-аппаратного видеокомплекса // Теория и практика физической культуры. 1996. № 4. С. 12–20.
55. **Тимошенко В.В.** Методологический подход к реализации потенциальных способностей спортсменов в велосипедных локомоциях. Минск, 2002. 252 с.
56. **Уткин В.Л.** Биомеханика физических упражнений: учебн. пособ. для фак-тов физич. восп. пед. инстит. М: Просвещение, 1989. 210 с.
57. **Фаворин М.В.** Моменты инерции тел: Справочник / Под ред. К.М. Гернета. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1977. 511 с.
58. **Фураев А.Н.** К вопросу о компьютеризации анализа выполнения спортивных упражнений // Теория и практика физической культуры. 1996. № 11. С. 50–52.
59. **Хасин Л.А., Бурьян С.Б., Минков С.В., Рафалович А.Б.** Информатизация отрасли «Физическая культура и спорт» и экспериментальные технологии // Теория и практика физической культуры. 1996. № 4. С. 7–11.
60. **Штофф Б.А.** Моделирование и философия. М.-Л.: Наука, 1966. 301 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ БИОМЕХАНИКИ	9
1.1. Общая характеристика биомеханики как учебной и научной дисциплины.....	9
1.2. Формы движения материи. Естественные и целенаправленные движения.....	13
1.3. Общая задача и частные задачи биомеханики.....	17
1.4. Взаимосвязь биомеханики с другими учебными дисциплинами	20
1.5. Характеристика анализа движений биомеханических систем, как метода биомеханики.....	22
1.6. Характеристика синтеза движений биомеханических систем, как метода биомеханики.....	24
Контрольные вопросы.....	25
2. БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ	26
2.1. Оптические методы регистрации движений.....	27
2.1.1. Киносъемка.....	27
2.1.2. Фотоциклосъемка.....	29
2.1.3. Светодиодная фотоциклосъемка.....	29
2.1.4. Стробоскопическая фотоциклосъемка.....	30
2.1.5. Видеомагнитофонная запись движений.....	31
2.2. Инструментальные методы регистрации движений.....	32
2.2.1. Электрическая тензометрия.....	32
2.2.2. Вектординамография.....	33
2.2.3. Электромиография.....	33
2.2.4. Электрогониометрия.....	34
2.2.5. Спидография, акселерография.....	35
Контрольные вопросы.....	36
3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАБОТЫ МЫШЕЧНОГО АППАРАТА	37
3.1. Биокинематические пары, цепи, степени свободы.....	37
3.2. Трехзвенная модель опорно-двигательного аппарата тела человека.....	40
3.3. Инерционность процесса мышечного напряжения.....	43
3.4. Зависимость «сила – суставной угол».....	46
3.5. Зависимость «сила – скорость».....	48
3.6. Факторы, определяющие величину проявления мышечной силы.....	50
Контрольные вопросы.....	52
ГЛАВА 4. БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	54
4.1. Классификация биомеханических характеристик.....	54
4.2. Биомеханические характеристики сегментов тела человека.....	56

4.2.1. Центр масс звеньев тела.....	63
4.2.2. Общий центр масс биомеханической системы.....	69
4.2.3. Момент инерции звеньев тела и биомеханической системы.....	72
4.3. Кинематические характеристики движения.....	81
4.3.1. Пространственные характеристики.....	81
4.3.2. Временные характеристики.....	95
4.3.3. Пространственно-временные характеристики.....	97
4.4. Динамические характеристики движений.....	106
Контрольные вопросы.....	112
5. МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯМИ СПОРТСМЕНА.....	
5.1. Безопорное состояние.....	
5.1.1. Биомеханика сгибательно-разгибательных движений спортсмена в суставах в безопорном состоянии при отсутствии начального вращательного импульса.....	112
5.1.2. Механизмы управления скоростью вращения звеньев тела спортсмена в полетной части упражнения при наличии начального вращательного импульса.....	117
5.1.3. Биомеханика перемещения общего центра масс тела спортсмена в полетной части упражнения.....	119
5.2. Опорное положение.....	120
5.2.1. Механизмы управления движениями спортсмена в условиях опоры за счет изменения величины внешних моментов сил.....	120
5.2.2. Механизмы управления движениями спортсмена в условиях опоры с использованием кориолисовой силы инерции.....	122
5.2.3. Закон сохранения количества движения (передача количества движения с одного звена тела на другое).....	124
Контрольные вопросы.....	125
6. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	127
6.1. Моделирование – один из методов научного познания.....	127
6.2. Расчетные модели анализа и математические модели синтеза движений биомеханических систем.....	133
6.3. Базовая математическая модель многозвенной неразветвленной биомеханической системы.....	140
6.4. Естественные движения и уравнения целенаправленных движений человека.....	145
6.5. Программирование движений человека.....	149
6.6. Синтез программного управления в целенаправленных движениях человека.....	153
6.7. Классификация математических моделей синтеза движений биомеханических систем.....	158
6.8. Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на кинематическом уровне.....	160
6.9. Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением в виде изменения суставных углов по времени.....	161

6.10. Характеристика математической модели и выбор алгоритмов ее функционирования.....	164
6.11. Математическая модель синтеза движений спортсмена с программным управлением изменения обобщенных координат.....	167
6.12. Построение конструктивных математических моделей движений спортсмена на основе программного управления по скорости (ускорению) изменения суставных углов или обобщенных координат.....	168
6.13. Конструктивная математическая модель движений спортсмена с программным управлением на динамическом уровне.....	169
Контрольные вопросы.....	171
7. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫХ УПРАЖНЕНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НА ПЭВМ.....	173
7.1. Общая характеристика проблемы синтеза оптимального управления в динамических системах.....	174
7.2. Формализация задачи построения оптимальной техники соревновательных упражнений и трактовка ее содержательной части.....	178
Контрольные вопросы.....	184
ПРАКТИКУМ ПО БИОМЕХАНИКЕ ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ).....	185
ЛИТЕРАТУРА.....	267

Учебное издание

**Валерий Иннокентьевич Загrevский,
Олег Иннокентьевич Загrevский**

**БИОМЕХАНИКА
ФИЗИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ**

Учебное пособие

Редактор – К.Г. Шилько
Оригинал-макет – А.И. Лелююр
Дизайн обложки – В.Г.Караваева

Подписано к печати 9.04.2007 г. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Печ. л. 17,1. Усл. Печ. л. 15,9. Тираж 100 экз. Заказ № 90.

Издательство «ТМЛ-Пресс»
624050, г. Томск, ул. Гагарина, 31-49.
Тел. 8+(382-2)-52-98-49

